

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR  
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

*Formación de singularidades en  
algunos problemas de reacción-difusión  
no lineales*

MARÍA TERESA PÉREZ PÉREZ

Septiembre 2007

Tesis doctoral dirigida por Raúl Ferreira de Pablo y Arturo de Pablo Martínez



*A vosotras, mamá, abuelita.*



*... Das Ziel ist also nicht so sehr das zu sehen,  
was noch niemand sah,  
sondern über die Dingen nachzudenken,  
über die niemand nachgedacht hat, die aber jeder sieht.<sup>1</sup>*  
SCHRÖDINGER

---

<sup>1</sup>Así pues, el objetivo no es tanto ver lo que todavía nadie vió, sino cuestionarse lo que aún nadie se cuestionó, acerca de algo que todos ven.



---

# *Prefacio*

Las siguientes páginas tienen como nexo común el análisis del fenómeno de explosión en ciertos problemas de evolución de tipo parabólico.

Comenzamos proponiendo un método numérico para tratar el problema de Dirichlet asociado a la ecuación del  $p$ -laplaciano con una fuente no lineal en un intervalo acotado. Demostramos que las aproximaciones numéricas obtenidas convergen a las soluciones del problema continuo, y que verifican un principio de comparación, además de otras propiedades. Con ellas reproducimos las condiciones de existencia de explosión, tasas y conjuntos de explosión y comportamiento asintótico conocidos para las soluciones del problema continuo.

A continuación estudiamos un problema asociado al operador doblemente no lineal con condición de contorno de tipo Neumann no lineal en un intervalo acotado. Demostramos existencia local de soluciones de dicho problema, y determinamos los conjuntos y tasas de explosión en función del valor de los exponentes que intervienen. Asimismo, para cierto valor de los mismos, demostramos la convergencia de las soluciones a un perfil estacionario.

Finalizamos dando algunos ejemplos de problemas parabólicos en varias dimensiones espaciales, cuyas soluciones explotan en compactos no triviales, de dimensión arbitrariamente menor que la del espacio ambiente. Para ello deberemos estudiar el soporte de las soluciones de ciertos problemas elípticos.





---

## *Agradecimientos*

Esta Memoria comprende el trabajo realizado en los últimos cuatro años. Tras todo este tiempo de esfuerzo y dedicación aún me cuesta creer estar escribiendo estas líneas. Y es que, si bien el lector es lo primero que encuentra, en general es lo último que se escribe.

Sí, no me ha resultado fácil llegar hasta aquí, pero sin duda mereció la pena, no sólo por haber disfrutado en muchos momentos de mi trabajo, sino además por haberme permitido éste viajar, conocer otras personas y ambientes, y hasta divertirme.

Y durante todos estos años no sois pocas las personas que en algún momento habeis aportado vuestro granito de arena de una u otra forma, para que esta tesis tenga lugar. Y si por alguien he de comenzar agradeciendo esa eres tú, Conchi, que tantas veces me has animado a continuar en esos momentos malos que todos tenemos, a pesar de no comprender muy bien para qué ” *nos pasamos la vida estudiando....*” Gracias por apoyar cada una de las decisiones que tomo y por mostrarme siempre con infinita paciencia el lado positivo de las cosas en cada dificultad.

Y cómo no a vosotros, Arturo y Raúl, que durante todo este tiempo me habeis transmitido ese entusiasmo y gusto por descubrir nuevos resultados. Os agradezco de verdad vuestra generosidad, tanto de tiempo como de medios que habeis puesto en mis manos para formarme en el mundo científico, y todo el apoyo humano que me brindasteis en el difícil comienzo. Gracias Arturo por estar siempre presto a leer

y corregir mis resultados, enseñándome a redactarlos mejor, así como a echarme un cable en las dudas que me van surgiendo. Y a tí, Raúl, por todas esas largas horas frente al pizarrón de *la complu* haciendo cuentas, unas de vida un tanto corta, – subir del comedor –, y otras de vida más larga, –alguno de los siguientes capítulos–. Con ellas aprendí a pensar y descubrí que muchas veces, detrás de un enunciado escueto y una demostración breve, hay un sinfín de papelotes en sucio, y que eso es precisamente lo que hace bonito este trabajo. Ha sido un verdadero placer trabajar con vosotros y espero poder seguir haciéndolo muchos años.

Tampoco puedo olvidaros a vosotras, Maribel y Nona, y tantos buenos y no tan buenos ratos compartidos, en el despacho y en casa. Vuestros consejos y ejemplo me sirvieron de guía para tomar la decisión acertada. Os echo mucho de menos.

Y hacen ya seis los años que trabajé en la Carlos III, durante los cuales sois tantos los compañeros que valió la pena conocer, aunque algunos ya no esteis. Gracias Jaime, por ayudarme en los primeros pasos con Matlab, y Alberto y Cristina, por resolverme tantos problemas con Latex. A tí Elena, por orientarme para dar mis primeras clases, y a tí, José Manuel, por tu apoyo en los cursos de Doctorado. Paco, te agradezco el entusiasmo que me transmitiste por correr y no olvidaré que la primera maratón la corrí con tu dorsal. Gracias Ángeles, Marina, Juany, Thalía, Alfredo, Julio, Roberto, María José, Alberto, Jaime, Saúl, Nacho, Jordi, Nona, Maribel, Dariana,... por esos ratillos de charla y risas en las comidas o cafés, antes de reanudar el trabajo. Gracias Asun por hacer que cualquier gestión administrativa resulte tan fácil y gracias en general a todo el Departamento de Matemáticas y al personal de servicios de la Carlos III, donde he podido trabajar cómodamente y feliz.

Pero ¿qué sería del trabajo sin un buen descanso el fin de semana? Olga, Maria José, Lorena, Domi, Isabelle, Beatriz ...., tantas tardes de cine, teatro, conciertos, museos, compras...y tantas mañanas de rastro y cañitas con vosotras, han hecho de Madrid un lugar que recordaré siempre con muchísimo cariño.

Sonia, Carmina, siempre recordaré que mi primera casa en Madrid estuvo en Antonio López. Os agradezco Paloma y Fernando que me ayudaraís a instalarme por primera vez en Leganés. Javi, Raquel, Olga, Domi, tampoco olvidaré toda vuestra ayuda en cada posterior traslado. Gracias Javi por enseñarme cosas de Madrid que nadie más me mostró, como aquél paseo en moto por la Castellana. Gracias por abrirnos tu casa cada navidad y a vosotros, Conchi, Ángel y Cristina, por querer venir a pasarla con nosotros. Ha sido divertido descubrir *el Madrid de los niños*.

Gracias María, Gemma, Delia, Inessa, Dorota, por esas tardes de *Club Deutsch* en Leganés, que me hicieron desconectarme de alguna que otra cuenta atascada, para retomarla al día siguiente con más ganas.

No puedo concluir sin dedicar alguna línea a las personas que he conocido en mis estancias en Bratislava y en Buenos Aires. Gracias Prof. Filo por aportarme una visión distinta de enfocar los problemas y de tratar de hacer mi estancia en Bratislava lo más agradable que pudo. Gracias Anka y Thomas por acogermme y mostrarme vuestra familia, amigos, costumbres y vuestra tierra. Igualmente, Daniel, Mariana, Julián, Carola, Sandra, Noemí, Ricardo, Gabriel, Eduardo, Susana...hicisteis de mis días en Buenos Aires una muy grata experiencia. Y si bien más corto, pero no menos agradable fue el tiempo que estuve en Valencia. Gracias Mazón, Fuensanta, Julián y Sergio, por mostrarnos tantos sitios bonitos.

Y aunque la siguiente confesión puede que os decepcione a algunos y os divierta a otros, quiero que quede incluida en esta parte, para recordarla y reirme en el futuro. Y es que quienes realmente me dieron el empujón definitivo para *sentarme a escribir* el trabajo de tantos años, y que posiblemente nunca tengan conciencia de ello, fueron el doctor Sanz y el doctor Murillo. Y agradecerles, por cierto, el buen trabajo que hicieron con mis pies.

Y vosotros, Conan, Feria, Tizón y Bowie, jamás podréis entender ni leer estas líneas, pero teneros en el Puerto esperándome ansiosos cada verano y puente festivo

para correr por la playa, ha hecho de mis vacaciones una muy buena oportunidad para descansar del a veces estresante Madrid.

Por último he de agradecerte a tí, Julio, no sólo como coautor de algunos de los resultados comprendidos en esta Memoria, sino también y sobre todo, como *cosufridor* de esos nervios que me han asaltado estos últimos meses. Y aprovecho ahora para decir algo que ya no podré hacer en lo sucesivo. Y es que el mejor resultado que se desprende del tercer capítulo de esta tesis, (y de lejos....!!!!) es haberte conocido.

---

---

# *Índice*

<b>Prefacio</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Blow-up numérico para el <math>p</math>-laplaciano con una fuente no lineal</b>	<b>17</b>
1.1. Introducción . . . . .	18
1.2. El esquema numérico. Convergencia y propiedades . . . . .	23
1.3. Explosión para el esquema numérico . . . . .	31
1.4. Tasa y tiempo de explosión . . . . .	35
1.5. Conjuntos de explosión . . . . .	40
1.6. Experimentos numéricos . . . . .	43
<b>2. Una ecuación doblemente no lineal con flujo no lineal en la frontera</b>	<b>53</b>
2.1. Introducción . . . . .	54
2.2. Existencia local de soluciones. Estimaciones a priori. . . . .	59
2.3. Explosión regional . . . . .	69
2.4. Explosión global y explosión puntual . . . . .	84
<b>3. Conjuntos de explosión de dimensión menor que el espacio ambiente</b>	<b>91</b>
3.1. Introducción . . . . .	92
3.2. Resultado principal . . . . .	93
3.3. Existencia de una solución de soporte compacto del problema elíptico . . .	97
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>



---

# Introducción

Las ecuaciones parabólicas de segundo orden del tipo

$$u_t = \nabla \left( A(x, u, \nabla u) \right) + B(x, u, \nabla u),$$

son utilizadas para modelar diversos fenómenos y procesos en mecánica, física, tecnología, biología y muchas otras áreas. Por ejemplo, bajo ciertas condiciones, la ecuación no lineal del calor,

$$u_t = \Delta \varphi(u) + f(u),$$

describe el proceso de conducción en plasma, filtración de gases y líquidos en medios porosos, reacciones químicas, procesos de crecimiento y migración de poblaciones, etc.

Para este tipo de problemas de evolución no lineales, por lo general se posee una teoría de existencia, unicidad y dependencia continua de las soluciones para tiempos cortos. Sin embargo, a diferencia de lo que sucede con los problemas lineales, existe la posibilidad de que a partir de datos regulares, las soluciones de aquellos desarrollen *singularidades en tiempo finito*.

Una forma bien conocida de aparición de singularidades se da cuando existe un tiempo  $T < \infty$ , llamado *tiempo de explosión*, tal que la solución  $u$  está bien definida para todo  $0 < t < T$ , mientras que

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty. \tag{I.1}$$

Esto es lo que se conoce como fenómeno de *explosión* o *blow-up*.

La prueba de que la causa de la misma es debida a la propia esencia no lineal del problema la brinda el siguiente ejemplo. Consideremos la ecuación ordinaria

$$\begin{aligned} u'(t) &= u^p(t), & t > 0, \\ u(0) &= u_0 > 0. \end{aligned} \tag{I.2}$$

Si  $p > 1$ , esta ecuación tiene como única solución la función

$$\begin{aligned} u(t) &= C_p(T - t)^{-1/(p-1)}, \\ T &= \frac{1}{u_0^{p-1}(p-1)}, \quad C_p = (p-1)^{-1/(p-1)}. \end{aligned} \tag{I.3}$$

A partir de la expresión explícita podemos observar que la solución  $u(t)$  es regular para todo  $t < T$  y que  $u(t) \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow T$ . Por otra parte, si  $p \leq 1$  las soluciones están definidas para todo tiempo  $t$ .

La situación es matemáticamente más difícil, y también más interesante para las aplicaciones a las distintas ciencias, cuando dotamos al problema de estructura espacial, de forma que las incógnitas dependen no sólo del tiempo, sino también de la variable espacial,  $u = u(x, t)$ , con  $x \in \Omega$ , siendo  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ .

Hay dos modelos de explosión escalares clásicos, donde se puede decir que comienza la historia matemática de la explosión. Uno de ellos es el *modelo de reacción exponencial*

$$u_t = \Delta u + \lambda e^u, \quad \lambda > 0, \tag{I.4}$$

que es importante en teoría de combustión [ZBLM] bajo el nombre de *modelo de combustible sólido* o *ecuación de Frank-Kamenetsky*, así como en geometría diferencial, [KW]. La otra ecuación de explosión clásica es la *ecuación semilineal del calor*

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad p > 1. \tag{I.5}$$

Las generalizaciones más usuales de estas ecuaciones sustituyen la reacción,  $u^p$ , por una función general superlineal y la difusión lineal,  $\Delta u$ , por un operador no lineal como el *operador de medios porosos* :

$$u_t = \Delta u^m + u^q, \tag{I.6}$$

o el *operador  $p$ -laplaciano*:

$$u_t = \nabla(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + u^q. \tag{I.7}$$



Los trabajos que componen esta tesis tienen como nexo común el estudio de la explosión en problemas de evolución con el operador  $p$ -laplaciano. Junto con el operador de medios porosos, ambos son casos particulares de un operador más general conocido como el *operador doblemente no lineal*:

$$\nabla \cdot (|\nabla u^m|^{p-2} \nabla u^m). \quad (\text{I.8})$$

Dediquemos pues unas líneas a describirlo y motivar sus múltiples aplicaciones físicas que incluyen mecánica de fluidos no newtonianos, flujos turbulentos, dinámica de poblaciones, o climatología.

### ***El operador no lineal $p$ -laplaciano***

Son numerosas las situaciones físicas en las que aparece involucrado de manera natural el operador  $p$ -laplaciano

$$\Delta_p u = \nabla (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

como modelo de difusión. Analizaremos aquí brevemente una de las más conocidas, el flujo turbulento de un fluido compresible en un medio poroso homogéneo e isotrópico, veánse [BCP, Le]. De acuerdo con [Le], este flujo puede ser descrito en términos de la densidad  $\rho$ , la presión  $\pi$  y la velocidad  $\vec{v}$ , todas ellas funciones de la variable espacial  $x$  y del tiempo  $t$ . Estas magnitudes están relacionadas por las siguientes leyes:

- En primer lugar, por la *ecuación de estado*, que establece que para fluidos considerados como gases politrópicos, se tiene

$$\pi = \pi_0 \rho^\gamma.$$

- Asimismo, por la *ecuación de continuidad*:

$$\eta \rho_t + \nabla(\rho \vec{v}) = 0.$$

- Por último, por la *Ley de Darcy no lineal*, ley empírica que describe la dinámica del fluido en régimen turbulento, y que sustituye para tales medios a las

ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\rho \vec{v} = -k |\nabla \Psi|^{\alpha-1} \nabla \Psi,$$

donde  $\Psi$  a su vez se relaciona con  $\pi$  de la forma

$$\Psi = \mu^{\frac{-1}{\alpha}} \pi^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}.$$

Los parámetros  $\eta$  (porosidad),  $\mu$  (viscosidad),  $k$  (coeficiente de difusión) y  $\pi_0$  (presión de referencia) se suponen constantes y positivos, y los exponentes  $\alpha$  y  $\gamma$  verifican  $\gamma > -1$ ,  $\alpha > 0$ . Combinando las ecuaciones anteriores, un cálculo sencillo nos lleva a deducir la ecuación

$$\eta \rho_t = \frac{k \pi_0^{\frac{\alpha(\gamma+1)}{\gamma}}}{\mu} \nabla (|\nabla \rho^{\gamma+1}|^{\alpha-1} \nabla \rho^{\gamma+1}),$$

la cual, rescalada convenientemente, se transforma en :

$$u_t = \nabla (|\nabla u^m|^{p-2} \nabla u^m) = \Delta_p u^m, \quad (\text{I.9})$$

con  $m = \gamma + 1 > 0$  y  $p = \alpha + 1 > 1$ .

Esta ecuación, conocida en la literatura como ecuación de filtración elástica no newtoniana ( $m = 1$ ) o politrópica ( $m \neq 1$ ), surge en varias situaciones físicas. Podemos encontrar algunas de sus aplicaciones y las principales propiedades de las soluciones en [EV, GiK, K, SGKM] y las referencias en ellos citadas. En este contexto, el parámetro  $p$  es una característica del medio: medios con  $p > 2$  se conocen como dilatantes, si  $p < 2$  reciben el nombre de pseudoplásticos, y si  $p = 2$  se trata de fluidos newtonianos.

La ecuación (I.9) describe un proceso de difusión en el que la difusividad  $D = m |\nabla u^m|^{p-2} u^{m-1}$  depende tanto de la solución como de su gradiente. Por tanto, puede degenerar (o ser singular, dependiendo de los valores de  $m$  y  $p$ ) cuando  $u = 0$  ó cuando  $\nabla u = 0$ .

Los casos límites  $p = 2$  ó  $m = 1$  corresponden, respectivamente, a la ecuación de los medios porosos y a la ecuación  $p$ -laplaciana. Obviamente, el caso  $m = 1$  y  $p = 2$  se reduce a la ecuación clásica del calor.

## Preguntas básicas

Durante mucho tiempo para estos problemas se consideraron las soluciones que explotan como ejemplos patológicos, útiles únicamente para establecer el grado de optimalidad de las condiciones necesarias para obtener existencia global. Sin embargo estas soluciones tienen significado físico: ignición, acumulación de ondas de choque ... Los primeros resultados rigurosos que prueban la aparición de este fenómeno en problemas parabólicos son los obtenidos por Kaplan [Ka] y Fujita [Fj1], [Fj2] en la década de 1960.

En la actualidad sin embargo, este es un campo muy activo, en el que hay continuamente nuevos resultados. Algunos de ellos están recogidos en los trabajos recopilatorios [DL, GV, Lev1]. Existen también algunos libros que muestran muchos de los resultados conocidos sobre explosión en problemas parabólicos, y que contienen extensas listas de referencias, por ejemplo [BE, SGKM, VK].

Describamos con más detalle qué se entiende por blow-up. Como ya dijimos anteriormente, las soluciones de algunos problemas parabólicos no lineales pueden desarrollar singularidades, aunque los datos iniciales de partida sean regulares. La forma más usual de singularidad consiste en que la propia solución del problema en cuestión se haga infinita en tiempo finito, es decir, explota en norma infinito. Se podría considerar también explosión en otros espacios  $L_r$ ,  $r < \infty$ . En este trabajo para nosotros blow-up querrá decir siempre explosión en sentido de la norma infinito, i.e. se verifica (I.1).

También pudiera suceder que fuera alguna de las derivadas de la solución la que presentara blow-up. Tal es el caso del problema estudiado en [SV], donde es la derivada espacial de la solución la que explota, mientras que la propia solución se mantiene acotada.

Otro tipo de singularidad que puede tener lugar es un fenómeno conocido como *quenching*, el cual fue observado por vez primera en [Kw] para el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) < 1, & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Las soluciones positivas de este problema se mantienen acotadas por uno, alcan-

zando este valor en cierto tiempo  $T < \infty$ , si el dominio es suficientemente grande, aunque lo hacen a velocidad infinita, ya que  $u'(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow T$ .

A raíz de este primer ejemplo, se han ido encontrando numerosos problemas en los cuales algún término de los que en ellos intervienen deja de tener sentido. Para consultar bibliografía referente a este fenómeno véase por ejemplo el trabajo recopilatorio [Lev2].

Son varias las preguntas que surgen ante este tipo de problemas:

(1) **¿Hay blow-up?**

Para comenzar el estudio de un problema determinado el primer paso es averiguar si efectivamente existen soluciones que se hacen infinitas (ellas o sus derivadas) en un tiempo finito  $T$ . Por ejemplo, la ecuación (I.4) siempre tiene soluciones que explotan, mientras que para la ecuación (I.5) se sabe que hay soluciones que explotan si y sólo si  $p > \sigma_0 \equiv 1$ . Se dice entonces que para este problema  $\sigma_0$  es el **exponente crítico de explosión**.

(2) **¿Qué soluciones explotan?**

Si hay soluciones que explotan en un determinado problema, nos interesa saber si todas las soluciones explotan o sólo las que pertenezcan a una cierta clase (que habría que identificar, por ejemplo en términos del dato inicial). En el problema de Dirichlet asociado a la ecuación (I.4), la explosión depende del tamaño del dominio, del tamaño del dato inicial o del valor del coeficiente de reacción  $\lambda$ . Por otro lado, en el caso de la ecuación (I.5) en todo  $\mathbb{R}^N$ , Fujita prueba que si  $1 < p \leq \sigma_c \equiv 1 + \frac{2}{N}$  todas las soluciones explotan, mientras que si  $p > \sigma_c$ , explotan únicamente las soluciones con dato inicial grande, [Fj1].

Un problema con este tipo de propiedad se conoce como problema de Fujita, y el exponente que delimita la zona de coexistencia de soluciones que explotan y soluciones globales frente a la zona en la que todas explotan,  $\sigma_c$ , se denomina **exponente de Fujita**.

(3) **¿Cuándo tiene lugar la explosión ?**

Si tenemos una solución que explota en tiempo finito, ¿qué se puede decir de este **tiempo maximal de existencia**  $T$ ? ¿Es posible estimarlo en términos de los parámetros, del dato inicial o de la forma que toma la solución a

medida que avanza el tiempo? ¿Es continuo respecto a los parámetros que intervienen en el problema o respecto a los datos iniciales?

Aunque no es frecuente, en ocasiones se puede tener incluso *explosión instantánea*, i.e.  $T = 0$ , como sucede en algunos casos de reacción exponencial, como la ecuación (I.4), ver [PV, V].

En este trabajo centraremos nuestra atención en la explosión en tiempo finito, o *blow-up estándar*, aunque el fenómeno de *grow-up*, esto es, explosión en tiempo infinito, suscita también cada día más interés, [GiK].

(4) **¿Dónde se produce la explosión?**

El conjunto de puntos espaciales donde la solución  $u$  explota,

$$B(u) = \{x \in \Omega / \exists (x_n, t_n), x_n \rightarrow x, t_n \rightarrow T^-, \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n, t_n) = \infty\}, \quad (\text{I.11})$$

se conoce como el **conjunto de explosión** de la solución  $u$ . Éste puede estar formado por un número finito de puntos, o un conjunto de medida de Hausdorff  $N$ -dimensional nula, lo que se denomina **explosión puntual**, puede tratarse de un subconjunto propio del dominio de la misma dimensión, **explosión regional**, o incluso puede haber explosión en todo el dominio, **explosión global**.

Para las ecuaciones (I.4) y (I.5), la explosión es siempre puntual.

Sin embargo, considerando como operador de difusión el operador medios porosos, la situación es más rica. Tomando un dato inicial radialmente decreciente, para las soluciones de (I.6) tienen lugar los tres tipos de explosión que citamos anteriormente. En concreto,

- i) Si  $1 < p < m$ , entonces  $B(u) = \mathbb{R}^N$ , *explosión global*, [SGKM].
- ii) Si  $p = m$  se tiene que  $B(u) = \{|x| \leq r\}$ , *explosión regional*, [CPE1, CPE3].
- iii) Por último, si  $p > m$  el conjunto de explosión se reduce a un punto,  $B(u) = \{x = 0\}$ , *explosión puntual*, [SGKM].

Otras cuestiones interesantes relativas al conjunto de explosión son estudiar si puede ser caracterizado en términos del dato inicial, o si presenta algún tipo de simetría o regularidad, [Z2, Z1], etc.

(5) ¿**Cómo** tiene lugar la explosión? Respecto a esta cuestión hay dos aspectos importantes a tener en cuenta:

(5.i) La **tasa** de explosión de  $u$ , esto es, la *velocidad* a la que tiene lugar la explosión, se determina mediante una estimación del tipo

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \sim (T - t)^{-\alpha},$$

donde por  $f \sim g$  entendemos que existen constantes positivas  $c, C$  tales que  $cg \leq f \leq Cg$ .

Como la explosión está originada por el término de reacción, a primera vista la difusión debería ser pequeña cerca del tiempo de explosión en aquellos puntos donde la solución explota. Por ejemplo, las soluciones del problema (I.5) que explotan en tiempo  $T$  lo hacen con la misma velocidad que la solución plana (esto es, la solución de la E.D.O. que resulta de prescindir del término de difusión) que explota en ese mismo instante, si  $1 < p < p_s$ , es decir

$$C_1(T - t)^{-1/(p-1)} \leq \|u(\cdot, t)\|_\infty \leq C_2(T - t)^{-1/(p-1)}.$$

Por  $p_s = (N + 2)/(N - 2)_+$  denotamos el **exponente crítico de Sobolev**, y dicha restricción sobre el exponente de reacción es necesaria para que la tasa de explosión sea la denominada *natural*, también denominada explosión de *tipo I*. Los primeros trabajos orientados a probar la estimación superior de la tasa para las soluciones de (I.5) son debidos a Weissler en [W1], si  $p < p_s$  y bajo ciertas hipótesis de crecimiento de las soluciones y de simetría. Veánse además [FrM, GK1].

Sin embargo, si  $p \geq p_s$  se pierde la desigualdad superior de la tasa de explosión, es decir, se puede tener que

$$\limsup_{t \rightarrow T} (T - t)^{1/(p-1)} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty,$$

y decimos que la explosión es en este caso *superrápida* o de *tipo II*. El primer contraejemplo de la tasa natural para exponentes supercríticos se encuentra en [HV], con  $p$  suficientemente grande y dimensión espacial  $N \geq 11$ .

(5.ii) Otro aspecto importante a considerar es el **perfil** de explosión, es decir, la forma de la solución cerca del tiempo de explosión. En general esta forma

se puede describir a través de la convergencia de la solución convenientemente rescalada a un perfil límite. Por ejemplo, para el problema (I.5), escribiendo

$$v(y, \tau) = (T - t)^{\frac{1}{p}-1} u(x, t), \quad y = x(T - t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau = -\log(T - t),$$

consultar [B, GK2, GK1]. En general habrá que contentarse con dar la forma de la solución cerca del punto o puntos de explosión, probando la convergencia uniforme en compactos de dichas soluciones reescaladas a cierto estado estacionario, esto es, se tiene

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} v(y, \tau) = f(y),$$

veáanse por ejemplo [CPE1, CPE2, GV]. El cambio de escala correspondiente varía con el problema a estudiar y depende de la tasa de explosión, y de la tasa de difusión, que para el problema (I.5) son  $\alpha = \frac{1}{p} - 1$  y  $\beta = \frac{1}{2}$ , respectivamente.

(6) **En el caso de sistemas, ¿es simultánea la explosión?**

En el estudio de sistemas, además de las preguntas anteriores, cabe preguntarse si la *explosión* tiene lugar de forma *simultánea* en todas las componentes. Pudiera suceder que, si el acoplamiento entre las mismas es lo suficientemente débil, algunas de ellas permaneciesen acotadas, *explosión no simultánea*. No obstante, en ocasiones este acoplamiento hace que las componentes que explotan arrastren a las otras hacia el blow-up, permitiendo la *explosión simultánea*.

Sobre el estudio acerca de la simultaneidad del blow-up en sistemas referimos por ejemplo a [QR1].

Por otra parte, ¿es el conjunto de explosión el mismo para todas las componentes? En [QR2] se encuentran ejemplos de soluciones cuyas componentes cuenclean en conjuntos distintos.

(7) **¿Se puede continuar la solución después de la explosión?**

En el instante  $t = T$  en que aparece la singularidad, explosión en nuestro caso, el problema considerado deja de tener sentido. ¿Existe alguna manera razonable de definir la solución a partir del tiempo de explosión? El

primer trabajo orientado en esta dirección se trata de [BC] en relación con el problema (I.5). Si aproximamos el problema por una sucesión de problemas globalmente bien definidos en tiempo, en el límite recuperamos la solución de nuestro problema para todo  $t < T$ . En [BC] se prueba que en el caso del problema (I.5) este límite se hace idénticamente infinito para todo  $t > T$ . Esto es lo que se conoce como explosión *completa*. En caso contrario, si existe un límite no trivial para  $t > T$  se dice que la explosión es *incompleta*.

Como referencia con respecto a estas cuestiones recomendamos los trabajos recopilatorios [F, GV].

- (8) **¿Cómo calcularlo numéricamente?** Otra dirección en la que se investiga recientemente, es en el desarrollo de esquemas numéricos, capaces no sólo de detectar el fenómeno de blow-up en modelos gobernados por ecuaciones de evolución, sino además de reproducir de forma adecuada las propiedades de explosión que presentan las soluciones continuas. En otras palabras, lo que nos interesa conocer de un método numérico es en qué medida las respuestas a las preguntas previas coinciden en la solución continua y en su aproximación numérica.

La principal dificultad con la que tropieza dicho análisis se debe principalmente a la imposibilidad de aplicar los teoremas de convergencia usuales, que no incluyen casos singulares como los problemas que aquí analizamos.

La solución de la ecuación ordinaria (I.2) nos sirve nuevamente de ejemplo que ilustra este hecho. Recordando su solución explícita en el caso  $p > 1$ , (I.3) podemos ver que cualquier perturbación (por ejemplo, una perturbación de su dato inicial  $u_{0,\varepsilon} = u_0 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ) provoca un cambio en el tiempo de blow-up de tal forma que el error crece indefinidamente aún mientras la solución es regular, *i.e.* si llamamos  $u_\varepsilon$  a la solución perturbada tenemos que

$$e(t) = u_\varepsilon(t) - u(t) \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow T_\varepsilon < T).$$

Por lo tanto, las técnicas usuales para problemas regulares no son aplicables a este tipo de problemas y deben desarrollarse otras nuevas que sirvan para demostrar qué propiedades de las soluciones continuas son heredadas por sus aproximaciones numéricas y cuáles no. Estas técnicas consistirán general-



mente en principios de comparación, desarrollos asintóticos y estimaciones funcionales de las soluciones discretas.

Aunque el análisis numérico desarrollado hasta la fecha sobre este tipo de modelos resulta aún escaso en relación con la teoría continua, podemos destacar algunos trabajos que se basan en esquemas de malla fija, como los estudiados en [ALM1, ALM2, N].

Ahora bien, haciendo uso de la invarianza de escala que poseen algunas soluciones de problemas de evolución, se pueden desarrollar algoritmos que refinan la malla espacial a medida que el tiempo transcurre, [BK], o bien adaptarla de manera adecuada (*moving mesh methods*), [BHR]. Éstos últimos, si bien son los más empleados, únicamente son aplicables a modelos unidimensionales y carecen de resultados de convergencia rigurosos.

Como trabajos recopilatorios donde se incluyen multitud de referencias se pueden consultar [BB, GR2].

## ***Contenido de la tesis.***

Hagamos una breve descripción del contenido de los diferentes capítulos que integran el presente trabajo, que trata de responder a las preguntas anteriores para algunas situaciones concretas. Nos centraremos en (8) en el primer capítulo, en (4) en el tercero y en general en (4-5) en el segundo.

**Capítulo 1.** En el primer capítulo de esta tesis nos centraremos en la ecuación  $p$ -laplaciana, a cuya descripción y motivación ya dedicamos una sección previa. En dicho planteamiento hemos obviado efectos adicionales de gravedad, convección o reacción. En particular, si tenemos en cuenta un efecto de reacción con densidad volumétrica  $c(u) = |u|^{q-2}$  para  $q > 2$ , obtenemos el modelo (I.7) de propagación no lineal del calor en un medio reactivo (reacción dada por la potencia  $|u|^{q-2}u$ ). Bajo este punto de vista  $u$  representa la temperatura, [GV]. Este problema también aparece en el estudio de fluidos no newtonianos y en teoría de filtración no lineal, [ZQ].

Más concretamente, estudiamos aproximaciones numéricas del problema de Dirichlet para la ecuación del  $p$ -laplaciano con una fuente no lineal,

$$\begin{cases} u_t = (|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u, & (x, t) \in (-L, L) \times (0, T), \\ u(-L, t) = u(L, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, & x \in (-L, L), \end{cases}$$

donde  $p > 2$ ,  $q > 2$  y  $L > 0$  son parámetros en términos de los cuales las soluciones del problema presentarán comportamientos muy diferentes. Por ejemplo, si  $q < p$  las soluciones existen para todo  $t > 0$ , mientras que si  $q \leq p$ , el término reactivo  $|u|^{q-2}u$  hace que existan soluciones que explotan en tiempo finito.

Para las soluciones discretas, nos cuestionamos las preguntas básicas citadas anteriormente, como las condiciones para la existencia de blow-up, los conjuntos y la velocidad de explosión o la convergencia hacia un perfil estacionario. Veremos que las respuestas a las mismas coinciden con las del problema continuo. Para ello demostraremos un Principio de Comparación para el problema discreto, desarrollaremos una Teoría de Intersecciones, utilizaremos argumentos de concavidad, funcionales de Lyapunov, estimaciones de energía, métodos de disparo para un problema estacionario, etc.

El contenido de este capítulo puede encontrarse en el artículo *Numerical blow-up for the  $p$ -Laplacian equation with a source*, Ferreira, R., de Pablo, A. y Pérez-Llanos M., M. Comput. Methods Appl. Math. **5**, nº2, 137–154, 2005.

**Capítulo 2.** La explosión no siempre se produce por causa de una reacción en el interior del dominio, como ha sido el caso de los problemas hasta el momento citados. En ocasiones la reacción se produce en la frontera, dando lugar a problemas con condición de Neumann no lineal, como el que analizamos en el Capítulo 2

$$\begin{cases} (u^\sigma)_t = (|u_x|^{p-2}u_x)_x & (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ u_x(0, t) = 0, \quad |u_x|^{p-2}u_x(L, t) = u^q(L, t) & t \in (0, T) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in [0, L], \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

donde  $0 < \sigma, q < \infty$ , y  $1 < p < \infty$  son parámetros. Nótese que en este problema realizando el cambio  $v = u^{\frac{1}{\sigma}}$ , la ecuación para  $v$  se transforma en la ecuación doblemente no lineal dada en (I.8), con  $m = \frac{1}{\sigma}$ .

El estudio de la explosión para problemas de difusión lineal y no lineal con condiciones de frontera no lineales, tiene su origen en los trabajos de Levine y Payne [LP], y desde entonces se ha dedicado bastante atención a este tipo de problemas, por ejemplo

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f(u), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

El operador  $\partial/\partial n$  denota la derivada en la dirección del vector normal exterior  $n$  a la frontera del dominio  $\partial\Omega$ . Si  $u$  representa por ejemplo la temperatura,  $\nabla u$  representa el flujo de calor, y la condición de frontera representa una ley de radiación no lineal en la frontera.

En [ChF, FF, FQR], pueden encontrarse más resultados y referencias relativas a la explosión producida por condiciones de borde no lineales.

En el problema (I.12) la reacción en la frontera da lugar los tres tipos de explosión posibles en un intervalo, de los cuales será el estudio de la explosión regional el que requiera algo más de trabajo, y al que dedicamos la mayor parte del segundo capítulo.

Este fenómeno ha sido analizado por un gran número de autores. El primer trabajo concerniente a la explosión regional en un problema involucrando un operador de difusión como  $(2.1)_1$  es [G1], donde se estudia el  $p$ -laplaciano

$$u_t = (|u_x|^{p-2}u_x)_x + u^q.$$

Para  $q = p - 1$  aparece explosión regional. Para la ecuación del calor con no linealidades de crecimiento lento tales como

$$u_t = \Delta u + u (\ln u)^2$$

el efecto de la explosión regional se describe en [L]. Posteriormente, en [G3], la ecuación de los medios porosos

$$u_t = (u^m)_{xx} + u^q$$

se considera en todo  $\mathbb{R}$ . En este caso se obtiene explosión regional cuando  $q = m$ . Si centramos nuestra atención en la explosión regional producida por una condición

de borde no lineal remitimos por ejemplo a [CEV], para el caso del problema formulado en la semirrecta:

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & \text{en } \mathbb{R}^+ \times (0, T), \\ -(u^m)_x(0, t) = u^q(0, t), & \text{en } (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \text{en } [0, L]. \end{cases}$$

y a [FGR1] para un intervalo acotado:

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & \text{en } (0, L) \times (0, T), \\ -(u^m)_x(0, t) = u^q(0, t), \quad u_x(L, t) = 0, & \text{en } (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \text{en } [0, L]. \end{cases}$$

Como veremos, el análisis de la explosión regional para el problema (I.12), requerirá el conocimiento de otros aspectos de la solución, como la tasa de explosión, que deduciremos mediante argumentos de masa, y la convergencia de las soluciones a un estado estacionario, via construcción de un funcional de Lyapunov y estimaciones de energía. Este hecho demuestra que las cuestiones que nos estamos planteando no se tratan de meras preguntas aisladas, sino que están íntimamente relacionadas entre sí.

No obstante, veremos que para algunos valores de los exponentes la explosión se produce también de forma puntual, usando técnicas similares a las introducidas en [FrM], y de forma global. Con esto analizamos los tres tipos de explosión posibles en un intervalo.

Estos resultados, que se encuentran contenidos en el artículo *Regional blow-up for a doubly nonlinear equation with nonlinear boundary condition*. Filo, J. y Pérez-Llanos, M., que aparecerá en J. Dynam. Differential Equations, generalizan y completan algunos de los resultados obtenidos en [DW, Fo, FGR1] para el operador de los medios porosos, y en [ChF] para el operador  $p$ -laplaciano, al operador doblemente no lineal.

**Capítulo 3.** Dedicamos este capítulo al estudio de algunos conjuntos de explosión en varias dimensiones espaciales. En esta ocasión enfocaremos dicho análisis en encontrar nuevos ejemplos de conjuntos de explosión.

Para comprender en qué medida son interesantes y novedosos estos ejemplos, recordemos la ecuación semilineal del calor dada en (I.5),

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad p > 1.$$

Determinar los conjuntos de explosión para esta ecuación es un problema difícil de tratar, sobre todo en varias dimensiones espaciales, ver [Ve]. Sin embargo para casos particulares se obtienen resultados sencillos. Por ejemplo, si el dato inicial es radial con un único máximo en el origen, entonces el conjunto de explosión se reduce a ese punto. Más en general, en una dimensión espacial se sabe que si el dato inicial tiene un número finito de máximos, el conjunto de explosión consiste en un número finito de puntos (no mayor que el número de máximos), [ChM].

Cabe añadir que, considerando soluciones radiales de la ecuación (I.5) en  $\mathbb{R}^N$ , con  $N \geq 2$ , se puede construir un ejemplo de conjunto de explosión que sea una esfera, [FM].

Hasta el momento, los únicos ejemplos de conjuntos de explosión puntuales contruidos, han sido conjuntos finitos de puntos o esferas, como es el caso de la ecuación (I.5).

En el tercer capítulo de esta tesis construimos soluciones explotando en compactos cualesquiera no triviales de dimensión arbitrariamente menor a la del espacio ambiente, por ejemplo, segmentos en  $\mathbb{R}^2$  o discos en  $\mathbb{R}^N$ ,  $N > 2$ .

Para ello propondremos ciertos problemas parabólicos en el espacio  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 2$ , o en el semiespacio con condición de contorno no lineal, y estudiaremos soluciones en variables separadas de los mismos. Esto nos permitirá desacoplar el problema original en un problema parabólico y un problema elíptico. Nuestro objetivo consistirá pues en demostrar que las soluciones del problema elíptico son de soporte compacto. Para ello emplearemos diversas técnicas, tales como planos móviles y argumentos de comparación.

Todos estos resultados pueden encontrarse en los artículos *Nontrivial compact blow-up sets of smaller dimension*. Pérez-Llanos, M. y Rossi, J. D., que aparecerá en Procc. Amer. Math. Soc. y *Nontrivial compact blow-up sets of lower dimension in a half-space*. Pérez-Llanos, M. y Rossi, J. D. enviado para su publicación.



# *Blow-up numérico para el $p$ -laplaciano con una fuente no lineal*

Estudiamos aproximaciones numéricas de soluciones no negativas de la ecuación  $p$ -laplaciana con una fuente no lineal,

$$\begin{cases} u_t = (|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u, & (x, t) \in (-L, L) \times (0, T), \\ u(-L, t) = u(L, t) = 0, & t \in [0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x) > 0, & x \in (-L, L), \end{cases}$$

donde  $p > 2$ ,  $q > 2$  y  $L > 0$  son parámetros. Describimos en términos de  $p$ ,  $q$  y  $L$  cuándo las soluciones de una semidiscretización en espacio existen globalmente en tiempo y cuándo explotan en tiempo finito. Asimismo encontramos las tasas y los conjuntos de explosión por medio de los perfiles autosimilares discretos.

## Contenido

---

1.1. Introducción . . . . .	18
1.2. El esquema numérico. Convergencia y propiedades . . . . .	23
1.3. Explosión para el esquema numérico . . . . .	31
1.4. Tasa y tiempo de explosión . . . . .	35
1.5. Conjuntos de explosión . . . . .	40
1.6. Experimentos numéricos . . . . .	43

---

## 1.1 Introducción

En este capítulo analizamos aproximaciones numéricas a las soluciones no negativas del siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = (|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u, & (x, t) \in (-L, L) \times (0, T), \\ u(-L, t) = u(L, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x) > 0, & x \in (-L, L), \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $p > 2$ ,  $q > 2$  y  $L > 0$  son parámetros y  $T$  es el tiempo máximo de existencia de las soluciones, véase [J].

Suponemos que el dato inicial  $\varphi$  es una función regular, positiva en  $(-L, L)$  y compatible con la condición de borde. Asimismo, por simplicidad asumimos que  $\varphi$  es simétrica y decreciente en  $[0, L]$ ; nuestro esquema numérico preservará estas propiedades de simetría, lo que facilitará los cálculos.

Nuestro objetivo en el presente trabajo es analizar si para el problema (1.1) una discretización numérica en espacio describe con exactitud el comportamiento del problema original. El caso  $p = 2$  se trata de la bien conocida ecuación semilineal del calor y las aproximaciones numéricas han sido ampliamente estudiadas, citamos por ejemplo [ALM1, BB, BK, GR1].

**El problema continuo.** Sinteticemos brevemente lo que se conoce para el problema continuo (1.1), véanse [BG, D, FO, G1, G2, GKPS, LX, Ts] y las referencias que en ellos se incluyen.

i) Si  $\varphi(x)$  es una función continua no trivial y no negativa, entonces existe una única solución no negativa  $u \in C^{1+\alpha, \frac{1}{2}}([-L, L] \times (0, T))$  para algún  $0 < \alpha < 1$  y algún  $T > 0$ , en sentido débil, esto es, verificando

$$\int_{-L}^L u_t \phi \, dx = \int_0^L u^{q-1} \phi - |u_x|^{p-2} u_x \phi_x \, dx,$$

para todo  $\phi \in W^{1,1}([-L, L])$  de soporte compacto en  $[0, L]$ .

ii)  $q = p$  es el exponente crítico de explosión, esto es, si  $q < p$  el problema (1.1) es global para toda condición inicial ( $T = \infty$ ), mientras que si  $q > p$  existen tanto soluciones globales, como soluciones que explotan en  $T < \infty$ .



En el caso crítico  $q = p$  la existencia de soluciones que explotan depende de la longitud del intervalo: la solución explota si y solamente si  $L$  es grande. En concreto, si  $\lambda_1(L) < 1$  no existen soluciones débiles globales no triviales, y si  $\lambda_1(L) \geq 1$  todas las soluciones débiles son globales, donde  $\lambda_1(L)$  es el primer autovalor del problema de autovalores no lineal

$$\begin{cases} -(|\psi_x|^{p-2}\psi_x)_x = \lambda|\psi|^{p-2}\psi, & -L < x < L, \\ \psi(-L) = \psi(L) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

iii) La tasa de explosión para las soluciones que explotan viene dada por el exponente  $\alpha = \frac{1}{q-2}$ , esto es

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty([-L, L])} \sim (T - t)^{-\frac{1}{q-2}}.$$

iv) En cuanto a los conjuntos de explosión, tenemos explosión puntual,  $B(u) = \{0\}$  si  $q > p$ , mientras que para  $q = p$  ésta nunca es puntual. Que la explosión sea regional o global en este caso depende de la longitud del intervalo. En concreto, se tiene que

$$B(u) = \begin{cases} [-L, L] & \text{si } L_p < L \leq L_\alpha, \quad (\text{explosión global}) \\ [-L_\alpha, L_\alpha] & \text{si } L > L_\alpha, \quad (\text{explosión regional}) \end{cases}$$

donde  $L_p$  es la longitud del intervalo para la cual el primer autovalor del problema (1.2) es igual a uno, y  $L_\alpha$  es la longitud máxima de existencia para los perfiles autosimilares positivos (en  $(-L_\alpha, L_\alpha)$ , ya que dichos perfiles presentan simetría par). Esta última afirmación se deduce de los resultados en [CPE1] y [G2].

**Resultados principales.** Resumimos aquí brevemente los resultados obtenidos cuando analizamos numéricamente el problema (1.1). Si realizamos una discretización de la variable espacial en un mallado uniforme, conservando la variable temporal continua, convertimos el problema (1.1) en un sistema de E.D.O.s de la forma

$$\begin{cases} MU'_h = \mathfrak{D}_p U_h + MU_h^{q-1}, \\ u_{-N} = u_N = 0, \\ U_h(0) = \varphi^I, \end{cases} \quad (1.3)$$

para cierta matriz  $M$  y cierto operador de diferencias no lineal  $\mathfrak{D}_p$ , que describimos en la Sección 1.2 con más detalle. Por  $U_h$  denotamos el vector cuyas componentes son el valor de la aproximación lineal,  $u_h$ , en los nodos, esto es,  $U_h(t) = (u_h(x_{-N}, t), \dots, u_h(x_N, t)) = (u_{-N}(t), \dots, u_N(t))$ .

Para este esquema numérico lo primero es establecer un resultado de convergencia que asegure que el método numérico propuesto converge en conjuntos de la forma  $[-L, L] \times [0, T - \tau]$ , para todo  $0 < \tau < T$ . Observemos que, debido a la singularidad desarrollada por la solución a tiempo  $t = T$ , no es posible que dicha convergencia pueda extenderse hasta el tiempo de explosión.

Nuestro objetivo es estudiar en qué medida la solución numérica  $U_h$  se aproxima a la solución original, cuando  $h \rightarrow 0$ . Entonces se verifica:

**Teorema 1.1** *Sea  $u \in C^{1+\alpha, \frac{1}{2}}([-L, L] \times [0, T - \tau])$ ,  $0 < \alpha < 1$ , una solución no negativa de (1.1) y  $u_h$  su aproximación numérica. Entonces existe una constante  $C$ , que depende de  $\tau$  y de la norma de  $u$  en el espacio anterior, tal que para todo  $h$  suficientemente pequeño se cumple que*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T-\tau} \|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{L^2([-L, L])} &\leq Ch^\alpha, \\ \max_{0 \leq t \leq T-\tau} \|u_x(\cdot, t) - (u_h)_x(\cdot, t)\|_{L^p([-L, L])} &\leq Ch^{2\alpha/p}, \\ \max_{0 \leq t \leq T-\tau} \|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{L^\infty([-L, L])} &\leq Ch^{2\alpha/p}. \end{aligned}$$

Más aún, si  $u(\cdot, t) \in W^{2,2}([-L, L])$  podemos tomar  $\alpha = 1$  en las estimaciones anteriores.

A continuación demostramos que, siempre que la solución  $u$  del problema continuo (1.1) explote, también lo hace  $U_h$ , la solución del problema discreto (1.3) si  $h$  es suficientemente pequeño.

Para establecer cuáles son las condiciones para las cuales tiene lugar la explosión numérica, introducimos el problema de autovalores discreto análogo a (1.2)

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_p \Psi + \lambda |\Psi|^{p-2} \Psi = 0, \\ \Psi(-L) = \Psi(L) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Denotamos por  $\lambda_1(L, h)$  al primer autovalor para este problema, y vemos que, en términos del mismo, las condiciones que garantizan la presencia de soluciones discretas que explotan son completamente análogas a las dadas para el problema continuo.

**Teorema 1.2** *Consideremos el problema de Dirichlet (1.10). Tenemos:*

- i) *Si  $q < p$  toda solución es global.*
- ii) *Si  $q = p$ , la solución explota en tiempo finito siempre que  $\lambda_1(L, h) < 1$ , mientras que si  $\lambda_1(L, h) \geq 1$  toda solución de (1.10) es global.*
- iii) *Si  $q > p$  existen soluciones que explotan en tiempo finito.*

Es más, en el caso  $q = p$  tenemos la convergencia de los autovalores discretos al autovalor continuo.

Obsérvese que en este caso ( $q = p$ ), se tiene que  $\lambda_1(L) \leq \lambda_1(L, h)$  (véase (1.33)), lo que significa que si la aproximación numérica explota también debe hacerlo la solución continua. Si  $q > p$  se desconoce si existen soluciones globales aproximadas por soluciones numéricas que explotan.

En lo que resta del capítulo, centramos nuestra atención en el comportamiento asintótico de la aproximaciones numéricas cerca del tiempo de explosión. Esto es, la tasa de explosión, la convergencia del tiempo de explosión de las soluciones discretas al tiempo de explosión de las soluciones al problema continuo y el conjunto de explosión.

En el caso  $q > p$  la reacción es más fuerte que la difusión, lo que facilita el análisis. Para el caso  $q = p$  construimos una familia de soluciones autosimilares adecuada

$$S_h(t) = (T_h - t)^{-1/(p-2)} W_h,$$

donde el perfil  $W_h = (\omega_k)$  satisface

$$\begin{cases} 0 = 2h^{-p}|\omega_1 - \omega_0|^{p-2}(\omega_1 - \omega_0) + |\omega_0|^{p-2}\omega_0 - \frac{1}{p-2}\omega_0, \\ 0 = \mathfrak{D}_p \omega_k + |\omega_k|^{p-2}\omega_k - \frac{1}{p-2}\omega_k, \end{cases} \quad k > 0. \quad (1.5)$$

Nótese que para cualquier  $w_0 > 0$  existe una única solución del problema anterior. Es más, esta solución converge al correspondiente perfil autosimilar continuo. Este

hecho y la versión discreta de la Teoría de Comparación mediante intersecciones (véase el Lema 1.10 posterior) nos permiten deducir la tasa para el problema discreto, y resulta ser idéntica a la del continuo.

**Teorema 1.3** *Sea  $q \geq p$  y sea  $U_h$  una solución que explota de (1.9) con tiempo de explosión  $T_h$ . Entonces existen dos constantes positivas independientes de  $h$  tales que*

$$C_1(T_h - t)^{\frac{-1}{q-2}} \leq \|U_h(t)\|_{L^\infty([-L, L])} \leq C_2(T_h - t)^{\frac{-1}{q-2}}. \quad (1.6)$$

Más aún, si  $q > p$  tenemos

$$\lim_{t \nearrow T_h} (T_h - t)^{\frac{1}{q-2}} \|U_h(t)\|_{L^\infty([-L, L])} = (q - 2)^{\frac{-1}{q-2}}.$$

El hecho de que las constantes  $C_i$ ,  $i = 1, 2$  de la tasa sean independientes de  $h$ , nos permitirá deducir la convergencia del tiempo de explosión discreto al tiempo en el que explota la correspondiente solución continua.

**Teorema 1.4** *Sea  $q \geq p$  y sea  $\varphi$  un dato inicial para (1.1) tal que  $u$  explota. Si denotamos por  $T$  y  $T_h$  los tiempos de explosión para  $u$  y  $U_h$  respectivamente, tenemos*

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_h = T.$$

En cuanto a los conjuntos de explosión de la aproximación numérica, esto es el conjunto de nodos  $x_k$  tales que  $u_k(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow T$ , probamos:

**Teorema 1.5** *Sea  $U_h$  una solución que explota de (1.9).*

*i) Si  $q > p$  el conjunto de explosión lo determina un número finito de nodos,  $B(U_h) = [-Kh, Kh]$ , donde  $K \equiv K(p, q)$  está dado por (1.29).*

*ii) Si  $q = p$  el conjunto de explosión es la totalidad del intervalo  $B(U_h) = [-L, L]$ .*

Observamos que en el caso  $q > p$  el conjunto de explosión de la solución numérica puede contener más de un único punto. No obstante, el único nodo donde la solución explota con la tasa dada en (1.6) es el origen, siendo ésta menor conforme nos alejamos del mismo. Además probamos que la cantidad de nodos que

comprende dicho conjunto no depende de  $h$ , (es decir,  $K$  no depende de  $h$ ) lo que implica que

$$B(U_h) = [-Kh, Kh] \rightarrow \{0\} = B(u), \quad \text{cuando } h \searrow 0.$$

Por otro lado, cuando  $q = p$  tenemos explosión global para todo  $h$ . Encontramos, por lo tanto, que no es posible la explosión regional para el método numérico que proponemos. Sin embargo podemos recuperar la explosión regional esperada para el esquema numérico (véase [FGR2]) por medio de las variables autosimilares

$$Y_h(s) = (T_h - t)^{1/(q-2)} U_h(t), \quad (T_h - t) = e^{-s}.$$

Probamos que la función rescalada  $Y_h(s)$  converge a un perfil autosimilar  $W_h$  cuando  $s \rightarrow \infty$ , donde  $W_h$  es la solución al problema (1.5) que cumple además  $\omega_N = 0$ . Por otro lado,  $W_h$  tiende a cero en los nodos que están fuera de  $[0, L_\alpha]$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Lo que para  $t \sim T_h$  significa,

$$u_k(t) \sim \omega_k(h)(T_h - t)^{-\alpha},$$

donde  $\omega_k(h) \rightarrow 0$  para los nodos que se encuentran en el intervalo  $[L_\alpha, L]$ . Y es en este sentido en el que se produce la explosión regional deseada si  $L > L_\alpha$ .

Comencemos describiendo el esquema numérico que utilizamos, para después demostrar que, efectivamente, reproduce de manera correcta el comportamiento asintótico de las soluciones continuas. En lo que sigue la letra  $C$  denotará una constante genérica, la cual puede ser diferente en cada situación. Asimismo utilizaremos la letra minúscula  $x_k$  para denotar las componentes de un vector  $X$ .

## 1.2 El esquema numérico. Convergencia y propiedades

Dedicamos esta sección a la descripción del esquema numérico que estudiamos. Consideremos la partición uniforme del intervalo  $[-L, L]$  de tamaño  $h$ , esto es, un mallado de nodos  $x_i = ih$  ( $h = L/N$ ), y el correspondiente espacio usual de aproximaciones por elementos finitos lineales a trozos  $V_h$ . Obtenemos nuestras aproximaciones semidiscretas,

$$u_h(t, x) = \sum_{k=-N}^N u_k(t) \phi_k(x), \quad \phi_k \in V_h, \quad (1.7)$$

empleando elementos finitos lineales a trozos con *mass lumping*. Se trata ésta de una técnica numérica que consiste en realizar una interpolación en las integrales que intervienen en el método de los elementos finitos, y conseguir de esta forma un mayor número de ceros entre las entradas de las matrices correspondientes. Más concretamente, nuestra aproximación lineal  $u_h$ , verifica

$$\int_{-L}^L [(u_h)_t \phi]^I dx + \int_{-L}^L |(u_h)_x|^{p-2} (u_h)_x \phi_x dx = \int_{-L}^L [(u_h)^{q-1} \phi]^I dx, \quad (1.8)$$

para toda función  $\phi \in V_h$ , y  $t \in (0, T)$ , donde el superíndice  $I$  denota la interpolación de Lagrange.

Sea  $U_h(t) = (u_{-N}(t), \dots, u_N(t))$  el vector cuyas componentes son los valores de la aproximación numérica  $u_h$  en los nodos en el tiempo  $t$ . Si en (1.8) tomamos  $\phi = \phi_k$ , para cada  $k$ , es fácil ver que  $U_h(t)$  satisface el siguiente problema

$$\begin{cases} MU'_h = \mathfrak{D}_p U_h + MU_h^{q-1}, \\ u_{-N} = u_N = 0, \\ U_h(0) = \varphi^I, \end{cases} \quad (1.9)$$

donde  $M = I_{2N}$  es la matriz de masa resultante tras aplicar *lumping* y

$$\mathfrak{D}_p U_h = D_+ |D_- U_h|^{p-2} D_- U_h.$$

En esta fórmula  $D_+$  y  $D_-$  denotan las matrices de rigidez dadas por las diferencias progresivas y regresivas, respectivamente, i.e.

$$D^+ = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & -1 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad D^- = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ 1 & -1 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente  $\varphi^I$  es la interpolación de Lagrange del dato inicial  $\varphi$ .

Queremos destacar que el operador  $\mathfrak{D}_p$  no viene dado por una matriz. Este hecho hace que el análisis de (1.9) difiera en gran medida respecto al esquema para tratar la ecuación semilineal del calor ( $p = 2$ ).

Escribiendo explícitamente la ecuación se obtiene el siguiente sistema de E.D.Os,

$$\begin{cases} u_{-N} = 0, \\ u'_k(t) = \mathfrak{D}_p u_k(t) + u_k^{q-1}(t), & -N+1 \leq k \leq N-1, \\ u_N = 0, \\ u_k(0) = \varphi(x_k), \end{cases} \quad (1.10)$$

donde  $\mathfrak{D}_p u_k$ , denota la  $k$ -ésima componente de  $\mathfrak{D}_p U_h$ , dada por

$$\mathfrak{D}_p u_k := \left( \mathfrak{D}_p u \right)_k = h^{-p} \left\{ |u_{k-1} - u_k|^{p-2} (u_{k-1} - u_k) - |u_k - u_{k+1}|^{p-2} (u_k - u_{k+1}) \right\}.$$

**Observación 1.1** *Para el estudio de problemas que presentan explosión se pueden aplicar además otros métodos tales como el método de malla móvil (moving mesh method) utilizado por ejemplo en [BK, BHR, DV, HRR]. Este método requiere cierta invarianza espacial del problema. A pesar de que los resultados cuantitativos resultan ser mejores cuando la malla se refina de forma apropiada, no conocemos ningún resultado de convergencia riguroso en esta dirección.*

Una vez descrito el esquema numérico que proponemos, probamos nuestro resultado de convergencia. Para ello hacemos uso de un resultado técnico sobre la aproximación de Lagrange, así como dos desigualdades sencillas de cálculo, véanse [BL1, GM].

**Lema 1.6** *i) Si  $f \in C^{1+\alpha}([-L, L])$ ,  $0 < \alpha < 1$ , entonces*

$$\|f - f^I\|_{L^\infty([-L, L])} = O(h^{1+\alpha}), \quad \|(f - f^I)'\|_{L^\infty([-L, L])} = O(h^\alpha).$$

*ii) Si  $f \in W^{2,s}([-L, L])$ ,  $s \geq 1$ , entonces*

$$\|f - f^I\|_{W^{1,s}([-L, L])} \leq Ch \|f\|_{W^{2,s}([-L, L])}.$$

Ahora estamos en disposición de probar las primeras estimaciones para nuestras soluciones, numérica y exacta, como paso previo para demostrar el Teorema 1.1.

En lo que sigue utilizaremos la notación

$$\nabla_p u = |u_x|^{p-2} u_x.$$

**Lema 1.7** Sea  $p \in (1, \infty)$  fijo. Existen constantes positivas tales que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  se cumple

$$\begin{aligned} \left| |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y \right| &\leq C_1 |x - y| (|x| + |y|)^{p-2}, \\ (|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y)(x - y) &\geq C_2 |x - y|^2 (|x| + |y|)^{p-2}. \end{aligned}$$

**Lema 1.8** Sea  $u$  la solución de (1.1),  $u_h$  su aproximación numérica y supongamos que ambas están acotadas en  $[0, t_0]$ . Entonces

$$\int_{-L}^L (u_t)^2 dx \leq C, \quad \int_{-L}^L ((u_h)_t)^2 dx \leq C.$$

**Demostración.** Usando  $u_t$  como función test en la formulación débil de (1.1) tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \int_{-L}^L (u_t)^2 dx dt &= -\frac{1}{p} \int_0^{t_0} \int_{-L}^L (|u_x|^p)_t dx dt + \frac{1}{q} \int_0^{t_0} \int_{-L}^L (u^q)_t dx dt \\ &= \frac{1}{p} \int_{-L}^L (|\varphi_x|^p - |u_x(t_0)|) dx - \frac{1}{q} \int_{-L}^L (\varphi^q - u^q(t_0)) dx \\ &\leq C(\|u(t_0)\|_{W^{1,p}([-L,L])}, \|u(t_0)\|_{L^\infty([-L,L])}, \|\varphi\|_{W^{1,p}([-L,L])}, \|\varphi\|_{L^\infty([-L,L])}). \end{aligned}$$

De la regularidad de  $u \in C^{1+\alpha, \frac{1}{2}}([-L, L] \times [0, T - \tau])$  y la estimación previa, se deduce fácilmente que en  $[0, t_0]$

$$\int_{-L}^L (u_t)^2 dx \leq C.$$

Las estimación para  $u_h$  se demuestra de forma similar.  $\square$

**Demostración del Teorema 1.1.** Definimos la función error como  $\varepsilon(x, t) = u(x, t) - u_h(x, t)$ , donde  $u$  es la solución del problema continuo (1.1), y  $u_h$  su aproximación numérica.

En primer lugar, definimos el tiempo

$$t_0 = \max\{t \in [0, T - \tau] : \max_{x \in [-L, L]} |\varepsilon(x, t)| \leq 1\},$$

el cual garantiza que ninguna de las dos soluciones explota en el intervalo  $[0, t_0]$ . Al final probaremos si  $h$  es suficientemente pequeño, se tiene que  $t_0 = T - \tau$ .



Consideremos  $V = W_0^{1,p}([-L, L])$  y su aproximación usual por elementos finitos lineales a trozos,  $V_h$ . A continuación consideramos la formulación variacional para ambos problemas, el problema continuo y el problema discreto. Si restamos las igualdades obtenidas, teniendo en cuenta que  $\int_{-L}^L |f^I| dx = \int_{-L}^L |f| dx + O(h^2)$ , llegamos a

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L u_t \Psi dx + \int_{-L}^L \nabla_p u \Psi_x dx - \int_{-L}^L (u_h)_t v_h dx - \int_{-L}^L \nabla_p u_h (v_h)_x dx \\ = \int_{-L}^L u^{q-1} \Psi dx - \int_{-L}^L (u_h)^{q-1} v_h dx + O(h^2), \end{aligned} \quad (1.11)$$

para todo  $\Psi \in V$  y  $v_h \in V_h$ , donde  $\nabla_p u = |u_x|^{p-2} u_x$ . Seguidamente tomamos como función test  $\Psi = v_h = u^I - u_h \in V_h \subset V$ . En consecuencia (1.11) da

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \varepsilon_t \varepsilon dx + \int_{-L}^L (\nabla_p u - \nabla_p u_h) \varepsilon_x dx dt \leq C \left\{ \int_{-L}^L |\varepsilon_t| |u - u^I| dx \right. \\ + \int_{-L}^L |u^{q-1} - (u_h)^{q-1}| |\varepsilon| dx + \int_{-L}^L |u^{q-1} - (u_h)^{q-1}| |u - u^I| dx \\ \left. + \int_{-L}^L |\nabla_p u - \nabla_p u_h| |(u - u^I)_x| dx + h^2 \right\} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + Ch^2. \end{aligned}$$

Trataremos cada una de las integrales anteriores por separado.

- Para estimar  $J_1$  tendremos en cuenta que por el Lema 1.8 sabemos que  $u_t$  y  $(u_h)_t$  están acotadas en norma  $L^2([-L, L])$ , para todo  $t \in [0, t_0]$ . En efecto,

$$\begin{aligned} J_1 = \int_{-L}^L |\varepsilon_t| |u - u^I| dx &\leq \left( \int_{-L}^L |\varepsilon_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-L}^L |u - u^I|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{-L}^L ((u_h)_t)^2 + (u_t)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-L}^L |u - u^I|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

- Usando ahora el Teorema del Valor Medio, y el hecho de que  $u$  y  $u_h$  están acotadas hasta  $t_0$ , acotamos  $J_2$ ,

$$J_2 = \int_{-L}^L |u^{q-1} - (u_h)^{q-1}| |\varepsilon| dx \leq \int_{-L}^L (q-1) \eta^{q-2} |\varepsilon|^2 dx \leq C \int_{-L}^L \varepsilon^2 dx,$$

para cierto  $\eta > 0$  comprendido entre  $u$  y  $u_h$  y, por consiguiente acotado.

- Por las consideraciones anteriores, para  $J_3$  tenemos

$$J_3 = \int_{-L}^L |u^{q-1} - (u_h)^{q-1}| |u - u^I| dx \leq C \int_{-L}^L |u - u^I| dx \leq Ch^{1+\alpha}.$$

• Procediendo con  $J_4$  como en [BL2], utilizando la primera de las estimaciones relativas al operador  $p$ -laplaciano dadas en el Lema 1.7, obtenemos

$$\begin{aligned} |(\nabla_p u - \nabla_p u_h)(u - u^I)_x| &\leq C(|u_x| + |(u_h)_x|)^{p-2} |\varepsilon_x| |(u - u^I)_x| \\ &\leq C(|u_x| + |(u_h)_x|)^{p-2} \left( \delta |\varepsilon_x|^2 + c(\delta) |(u - u^I)_x|^2 \right) \end{aligned}$$

para todo  $\delta > 0$ . Obsérvese que la segunda estimación del Lema 1.7 implica

$$(\nabla_p u - \nabla_p u_h) \varepsilon_x \geq C_1 (\varepsilon_x)^2 (|u_x| + |(u_h)_x|)^{p-2}.$$

Así pues, eligiendo  $\delta$  suficientemente pequeño podemos absorber el primer término de  $J_4$  en el miembro izquierdo de la ecuación. Para acotar el segundo término de  $J_4$  observamos que tanto  $u_x$  como  $(u_h)_x$  se mantienen acotadas en  $[0, t_0]$ ,

$$\int_{-L}^L (|u_x| + |(u_h)_x|)^{p-2} |(u - u^I)_x|^2 dx \leq C \int_{-L}^L |(u - u^I)_x|^2 \leq Ch^{2\alpha}.$$

Recapitulando,

$$\int_{-L}^L \varepsilon_t \varepsilon dx + \int_{-L}^L (\nabla_p u - \nabla_p u_h) \varepsilon_x dx dt \leq C \int_{-L}^L \varepsilon^2 + O(h^{2\alpha}),$$

y teniendo en cuenta la desigualdad

$$\varepsilon_x^2 (|u_x| + |(u_h)_x|)^{p-2} \geq C \varepsilon_x^2 (|u_x| + |\varepsilon_x|)^{p-2} \geq |\varepsilon_x|^p,$$

deducida del Lema (1.7), obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-L}^L \varepsilon^2 \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-L}^L \varepsilon^2 + \int_{-L}^L |\varepsilon_x|^p \leq C \int_{-L}^L \varepsilon^2 + O(h^{2\alpha}). \quad (1.12)$$

Integrando la desigualdad anterior en  $[0, t]$  para cualquier  $0 < t < t_0$ , y utilizando la estimación del error para la interpolación dada anteriormente, llegamos a

$$\int_{-L}^L \varepsilon^2(t) dx \leq C e^{2CT} h^{2\alpha},$$

para algún  $0 < \alpha < 1$ . Subrayamos que si asumimos  $u \in W^{2,p}$  podemos tomar  $\alpha = 1$  en la estimación anterior. Considerando nuevamente (1.12) obtenemos además

$$\int_{-L}^L |\varepsilon_x|^p \leq Ch^{2\alpha}.$$

Observamos ahora que gracias a la inclusión  $W_0^{1,p}([-L, L]) \hookrightarrow L^\infty([-L, L])$  tenemos la cota del error correspondiente en la norma  $L^\infty$ ,

$$\max_{0 \leq t \leq T-\tau} \|u(\cdot, t) - u_h(\cdot, t)\|_{L^\infty([-L, L])} \leq Ch^{2\alpha/p}.$$

Por último, remarquemos que la estimación anterior no depende de  $t_0$ . Podemos tomar entonces  $t_0 = T - \tau$  para todo  $h$  suficientemente pequeño, completando así la demostración.  $\square$

A continuación queremos establecer un Principio de Comparación de soluciones para el problema discreto. Para este fin necesitamos introducir la siguiente definición,

**Definición 1.1** Diremos que  $\overline{U}$  es una supersolución (resp.  $\underline{U}$  una subsolución) si satisface (1.9) con una desigualdad superior (resp. inferior) en lugar de la igualdad.

**Lema 1.9** Sean  $\overline{U}$  y  $\underline{U}$  una supersolución y una subsolución respectivamente, entonces

$$\overline{U}(t) \geq U_h(t) \geq \underline{U}(t).$$

**Demostracion.** Por un proceso de aproximación nos restringimos a considerar desigualdades estrictas para la supersolución. Probemos  $\overline{U}(t) > U_h(t)$ . Razonamos nuevamente por contradicción. Supongamos que existe un primer tiempo  $t_0$  y un nodo  $j$  tal que  $\overline{u}_j(t_0) = u_j(t_0) = a$ ; entonces para  $-N + 1 < j < N - 1$  tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \overline{u}'_j(t_0) - u'_j(t_0) \\ &> \frac{1}{h^p} \left\{ |\overline{u}_{j-1}(t_0) - a|^{p-2} (\overline{u}_{j-1}(t_0) - a) - |u_{j-1}(t_0) - a|^{p-2} (u_{j-1}(t_0) - a) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{h^p} \left\{ |a - u_{j+1}(t_0)|^{p-2} (a - u_{j+1}(t_0)) - |a - \overline{u}_{j+1}(t_0)|^{p-2} (a - \overline{u}_{j+1}(t_0)) \right\} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

lo que supone una contradicción. La desigualdad  $U_h(t) \geq \underline{U}(t)$  puede deducirse de forma similar.  $\square$

Seguidamente incluimos dos resultados relativos al número de intersecciones entre dos soluciones. El primero se trata de la versión discreta del bien conocido Teorema de Comparación de Sturm, véase por ejemplo [SGKM]. El segundo se trata de una consecuencia directa del Principio de Comparación.

**Lema 1.10** Sean  $U_h$  y  $V_h$  dos soluciones del sistema de ecuaciones

$$u'_k(t) = \mathfrak{D}_p u_k(t) + u_k^{q-1}(t), \quad J_1 \leq k \leq J_2.$$

Supongamos que en cierto tiempo  $t^*$  tienen una única intersección en  $[x_{J_1}, x_{J_2}]$ , i.e., para algún  $k_0$ , se verifica  $u_j(t^*) \geq v_j(t^*)$  para todo  $j \leq k_0$ ,  $u_{j_0}(t^*) < v_{j_0}(t^*)$  y  $u_j(t^*) \leq v_j(t^*)$  para  $j > k_0$ . Asumamos también que  $u_{J_1}(t) > v_{J_1}(t)$  y  $u_{J_2}(t) < v_{J_2}(t)$  para todo  $t \geq t^*$ . Entonces, el número de intersecciones para  $t > t^*$  es como máximo uno.

**Demostración.** Denotemos por  $E_h(t) = V_h(t) - U_h(t)$ . Por contradicción, supongamos que existe un primer tiempo  $t_0$  tal que  $e_k(t_0) = 0$ , para  $k \neq k'_0$ , donde  $k'_0$  es el nodo de la intersección existente a tiempo  $t_0$ . Sea  $k < k'_0$  (para la situación  $k > k'_0$  el siguiente razonamiento es el mismo con un cambio de signo). Entonces

$$0 \leq e'_k(t_0) = (\mathfrak{D}_p v_k(t_0) - \mathfrak{D}_p u_k(t_0)) + v_k^{q-1}(t_0) - u_k^{q-1}(t_0) \leq 0,$$

lo cual repetido para cada nodo implica que  $v_j(t_0) = u_j(t_0)$ ,  $J_1 \leq j \leq k'_0$ . Llegamos así a contradicción.  $\square$

**Observación 1.2** Nótese que el argumento anterior se puede generalizar para probar que el número de intersecciones es una función no creciente del tiempo.

**Lema 1.11** Dos soluciones ordenadas del problema (1.10) no pueden explotar al mismo tiempo.

**Demostración.** Sean  $U_h$  y  $V_h$  dos soluciones de (1.10) y sea  $T$  el tiempo de explosión de  $U_h$ . Supongamos que existe  $t_0$  tal que  $U_h(t_0) > V_h(t_0)$ . Entonces el Principio de Comparación implica que  $U_h(t) > V_h(t)$ , para todo  $t \geq t_0$ . Mediante un argumento análogo al utilizado en la prueba de la proposición 2 del capítulo IV de [SGKM], se puede rescalar  $V_h(t)$  y probar que no explota antes de  $T + \varepsilon$ , para cierto  $\varepsilon > 0$ .  $\square$

Concluimos esta sección probando algunos resultados que verifica nuestro método numérico, los cuales simplificarán los cálculos. En primer lugar, establecemos una propiedad de simetría para el problema numérico (1.10). Diremos que un vector es simétrico si verifica  $u_{-k} = u_k$ , para todo  $k = 1, \dots, N$ .

**Lema 1.12** *Sea  $U_h(0)$  un vector simétrico; entonces la solución  $U_h(t)$  al problema (1.9) es asimismo simétrica para todo  $t \in (0, T_h)$ .*

**Demostracion.** Este resultado se deduce fácilmente de la reflexión y unicidad del problema.  $\square$

**Observación 1.3** *Como  $u_k(0) = \varphi(x_k)$  y  $\varphi$  es simétrico, entonces  $U_h(0)$  (y consecuentemente  $U_h(t)$ ) es simétrico. Así que para trabajar podemos restringirnos al intervalo  $[0, L]$ , reduciendo así el tamaño del sistema de E.D.O. que ha de ser resuelto numéricamente. Es decir, en adelante estudiaremos el sistema*

$$\begin{cases} u'_0(t) = 2h^{-p}|u_1 - u_0|^{p-2}(u_1 - u_0) + u_0^{q-1}, \\ u'_k(t) = \mathfrak{D}_p u_k + u_k^{q-1}, \\ u_N(t) = 0. \end{cases} \quad 0 < k < N, \quad (1.13)$$

**Lema 1.13** *Sea  $U_h$  una solución de (1.10) con  $u_k(0) > u_{k+1}(0)$ , para todo  $0 \leq k \leq N-1$ . Entonces  $u_k(t) > u_{k+1}(t)$ , para todo  $0 \leq k \leq N-1$ .*

**Demostracion.** Razonemos por contradicción. Supongamos que existe un primer tiempo  $t_0$  y dos nodos consecutivos para los cuales falla la conclusión del lema. Esto es, si les llamamos  $j, j+1$ , suponemos que  $u_{j+1}(t_0) = u_j(t_0)$ . De las ecuaciones (1.10) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 \geq u'_j(t_0) - u'_{j+1}(t_0) &= \frac{1}{h^p} \{ |u_{j-1}(t_0) - u_j(t_0)|^{p-2}(u_{j-1}(t_0) - u_j(t_0)) \\ &\quad + |u_{j+1}(t_0) - u_{j+2}(t_0)|^{p-2}(u_{j+1}(t_0) - u_{j+2}(t_0)) \} \geq 0. \end{aligned}$$

De aquí se desprende que  $u_{j-1}(t_0) = u_j(t_0) = u_{j+1}(t_0) = u_{j+2}(t_0)$ . Usando el mismo razonamiento con todos los nodos, llegamos a que  $u_j(t_0) = u_N(t_0) = 0$ . Este hecho contradice la unicidad del problema retrógrado para  $t < t_0$ , ya que  $U_h(0) > 0$ .  $\square$

**Observación 1.4** *El resultado anterior garantiza que el máximo de  $U_h(t)$  se alcanza en el nodo central  $x_0 = 0$ .*

### 1.3 Explosión para el esquema numérico

Dos serán los objetivos principales a abordar en la presente sección, garantizar que toda solución continua que explota está incluida en nuestro análisis y carac-

terizar cuándo el problema discreto (1.10) tiene soluciones que presentan blow-up.

Para ello consideramos el funcional de energía para el problema continuo (1.1) dado por

$$H(v) = \frac{1}{p} \int_{-L}^L |v_x|^p dx - \frac{1}{q} \int_{-L}^L |v|^q dx, \quad v \in W_0^{1,p}([-L, L]).$$

Dicho funcional es no creciente sobre las órbitas del problema (1.1), es decir,  $\frac{d}{dt}H(u(\cdot, t)) \leq 0$ , para toda  $u$  solución de (1.1). Asimismo se sabe que si  $q \geq p$  y  $\varphi \in W_0^{1,p}([-L, L]) \cap L^\infty([-L, L])$  satisface  $H(\varphi) < 0$ , entonces la correspondiente solución del problema (1.1) explota en tiempo finito, (véanse [J, LX, Mes]).

Veamos que además satisface la siguiente propiedad, cuya prueba se puede hacer siguiendo las mismas ideas que en [CPE2], pero que incluimos en el Apéndice por completitud.

**Lema 1.14** *Si  $u$  explota en tiempo finito  $T$  entonces*

$$\lim_{t \rightarrow T} H(u(t)) = -\infty. \quad (1.14)$$

Seguidamente definimos  $H_h$ , el funcional discreto análogo a  $H$ , como

$$H_h(t) \equiv H_h(U_h(t)) = \frac{1}{p} \langle -\mathfrak{D}_p U_h, U_h \rangle(t) - \frac{1}{q} \langle |U_h|^{q-2} U_h, U_h \rangle(t). \quad (1.15)$$

El resultado que probamos a continuación nos permitirá deducir los dos objetivos fundamentales de esta parte mencionados anteriormente.

**Proposición 1.15** *Sea  $q \geq p$ . Consideremos el funcional de energía discreto dado en (1.15). Si existe  $t_0$  tal que  $H_h(t_0) < 0$ , entonces  $U_h$  explota.*

**Demostración.** En primer lugar notemos que  $H_h(t)$  es también no creciente a lo largo de las órbitas  $H'_h(t) = -\langle U'_h, U'_h \rangle(t) \leq 0$ . Por tanto,  $H_h(t) < 0$  para todo  $t \geq t_0$ . Introduzcamos a continuación el siguiente funcional

$$J(t) \equiv J(U_h(t)) = \frac{1}{2} \langle U_h, U_h \rangle(t),$$

y utilicemos argumentos de concavidad, como en [Lev3]. Tenemos

$$J'(t) = \langle U_h, U'_h \rangle(t) = -pH_h(t) + (1 - p/q) \langle U_h^{q/2}, U_h^{q/2} \rangle(t).$$

Debido al término adicional que aparece en la expresión de la primera derivada de  $J$  si  $q > p$ , este caso necesita un tratamiento diferente. De hecho, únicamente será necesario uno de los términos en cada caso para obtener la explosión de  $U_h$ . Para el caso  $q > p$  tenemos

$$J'(t) \geq C \langle U_h^{q/2}, U_h^{q/2} \rangle(t) \geq C \langle U_h, U_h \rangle^{q/2}(t) = C J(t)^{q/2}.$$

Como  $q > 2$ , significa que  $J$  explota en tiempo finito y por lo tanto también  $U$  lo hace.

Para el caso  $q = p$  tenemos que las dos primeras derivadas del operador  $J$  son positivas. En efecto,  $J'(t) = -pH_h(t) > 0$  y  $J''(t) = -pH'_h(t) = p \langle U'_h, U'_h \rangle(t) > 0$ .

Por otro lado, al ser  $p > 2$  tenemos que la función  $J(t)^{1-\frac{p}{2}}$  es decreciente. Además se cumple la siguiente estimación

$$(J'(t))^2 = \langle U_h, U'_h \rangle^2(t) \leq \langle U_h, U_h \rangle \langle U'_h, U'_h \rangle(t) = \frac{2}{p} J(t) J''(t),$$

que nos permite probar que  $J(t)^{1-\frac{p}{2}}$  es cóncava. Luego se anula en tiempo finito, lo que significa que  $J(t)$  explota en tiempo finito. En consecuencia, también  $U_h$  explota en tiempo finito.  $\square$

**Observación 1.5** *En la primera parte de la prueba únicamente se asume que  $q > \max(p, 2)$  con lo que el resultado sería igualmente válido para el rango  $1 < p \leq 2$ .*

Como consecuencia de los dos resultados anteriores demostramos a continuación, que siempre que la solución continua explote, y  $h$  es suficientemente pequeño, su aproximación numérica también lo hace.

**Proposición 1.16** *Sea  $u$  una solución que explota de (1.1). Entonces la solución  $U_h$  de (1.13) también explota para  $h$  suficientemente pequeño.*

**Demostracion.** Por el Teorema 1.1 resulta sencillo comprobar la convergencia  $\|H_h(t) - H(t)\|_{L^1([-L, L])} \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ , lo cual, añadido al Lema 1.14 nos permite concluir que si  $u$  explota en tiempo finito, entonces  $H_h(t_0) < 0$  para algún  $t_0$  y  $h$  suficientemente pequeño. La Proposición 1.15 concluye la prueba.  $\square$

La Proposición 1.15 también nos capacita para establecer las condiciones que garantizan la presencia de blow-up para el problema discreto. Resultan ser completamente análogas a las que dimos en la Sección 1.1 para el caso continuo.

Sea  $\lambda_1(L, h)$  el primer autovalor para el problema de autovalores discreto análogo a (1.2), y  $\Psi = (\psi)_k$  el vector que consiste en su autofunción asociada, solución del siguiente problema

$$\begin{cases} 2h^{-p}|\psi_1 - \psi_0|^{p-2}(\psi_1 - \psi_0) + \lambda|\psi_0|^{p-2}\psi_0 = 0, \\ \mathfrak{D}_p\psi_k + \lambda|\psi_k|^{p-2}\psi_k = 0, \\ \psi_N = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Establecemos en términos del mismo las condiciones de blow-up para las soluciones discretas. Para ello utilizaremos repetidamente el Principio de Comparación del Lema 1.9.

**Demostración del Teorema 1.2.** La prueba consistirá en comparar con subsoluciones que explotan o con supersoluciones globales, según cada caso.

*i)* Si  $q < p$  consideramos la primera autofunción  $\Psi$  del operador  $p$ -laplaciano discreto (1.16) en el intervalo  $[-L-1, L+1]$ . No es difícil ver que para  $c$  suficientemente grande tenemos que  $U_h(0) \leq c\Psi$  y que  $c\Psi$  es una supersolución global estacionaria de (1.13). El Principio de Comparación concluye la primera parte del teorema.

*ii)* Si  $q = p$  sea  $\Psi > 0$ , para todo  $k \neq N$ , la primera autofunción del problema (1.16) con  $\|\Psi\|_{L^\infty([-L, L])} = 1$ . Entonces, si  $\lambda_1(L, h) < 1$ , para cualquier  $c > 0$  se cumple,

$$H_h(0) = \frac{1}{p}\langle -\mathfrak{D}_p(c\Psi), c\Psi \rangle - \frac{1}{p}\langle |c\Psi|^{p-2}c\Psi, c\Psi \rangle = c^p \frac{\lambda_1 - 1}{p} \langle |\Psi|^{p-2}\Psi, \Psi \rangle < 0.$$

En consecuencia, la solución de (1.1) con dato inicial  $c\Psi$  explota en tiempo finito por la Proposición 1.15.

Dado cualquier dato inicial  $\varphi(x) > 0$  no trivial, y eligiendo  $c > 0$  pequeño de tal modo que  $U_h(0) \geq c\Psi$ , concluimos que la correspondiente solución explota en tiempo finito por el Principio de Comparación.

Si, por el contrario,  $\lambda_1(L, h) \geq 1$ , obsérvese que, tomando  $c$  suficientemente grande,  $c\Psi$  es una supersolución estacionaria de (1.1). Por lo tanto, aplicando de nuevo el Principio de Comparación, deducimos que  $U_h$  es global.



iii) La Proposición 1.15 asegura que si  $q > p$  existen soluciones que explotan, aquéllas cuyo dato inicial verifica que  $H_h(0) < 0$ .  $\square$

Finalizamos esta sección con un resultado sobre convergencia de autovalores. Posponemos hasta el Apéndice de este capítulo su prueba, que se deduce siguiendo los pasos dados en [R].

**Teorema 1.17** Sean  $\lambda_1(L)$  y  $\lambda_1(L, h)$  el primer autovalor de los problemas (1.2) y (1.16), respectivamente. Tenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_1(L, h) = \lambda_1(L).$$

## 1.4 Tasa y tiempo de explosión

Dedicamos esta sección a la demostración de los resultados relativos al tiempo de explosión, los Teoremas 1.3 y 1.4. Comenzamos por el estudio de la tasa de explosión. Recalcamos que los coeficientes que obtenemos en las tasas no dependen de  $h$ .

**Demostración del Teorema 1.3.** En primer lugar, observamos que de la ecuación que verifica el nodo central  $u_0$

$$u'_0(t) = 2h^{-p}|u_1 - u_0|^{p-2}(u_1 - u_0) + u_0^{q-1},$$

se deduce que

$$u_0^{q-1} \geq u'_0 \geq u_0^{q-1} \left(1 - \frac{2}{h^p} u_0^{p-q}\right). \quad (1.17)$$

Integrando en tiempo la primera desigualdad se obtiene la estimación inferior del Teorema 1.3. De hecho,

$$u_0(t) \geq (q-2)^{-1/(q-2)} (T_h - t)^{-1/(q-2)}. \quad (1.18)$$

Si  $q > p$  podemos considerar la estimación (1.18) en la segunda desigualdad en (1.17),

$$u'_0(t) \geq u_0(t)^{q-1} \left(1 - \frac{2}{h^p} (T_h - t)^{\frac{q-p}{q-2}}\right),$$

para  $t$  suficientemente cercano a  $T_h$ . Integrando la estimación previa entre  $t$  y  $T_h$  se obtiene

$$u_0(t) \leq \left[ (q-2)(T_h - t) \left( 1 - \frac{2(q-2)}{h^p(2q-p-q)} (T_h - t)^{\frac{q-p}{q-2}} \right) \right]^{-\frac{1}{q-2}}. \quad (1.19)$$

Teniendo en cuenta (1.18), si tomamos límite en (1.19) demostramos que, efectivamente

$$\lim_{t \nearrow T_h} (T_h - t)^{\frac{1}{q-2}} u_0 = (q-2)^{-1/(q-2)}, \quad (1.20)$$

Nótese que para el caso  $q = p$  y  $h$  pequeña, la segunda desigualdad en (1.17) carece de sentido. A fin de obtener la estimación superior en este caso cuando razonamos de modo distinto. Construimos la siguiente familia de soluciones autosimilares

$$S_h(t) = (T_h - t)^{-1/(p-2)} W_h,$$

donde el perfil  $W_h = (\omega_k)$  satisface

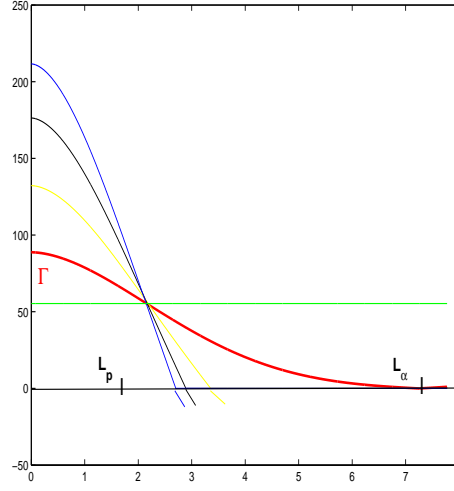
$$\begin{cases} 0 = 2h^{-p} |\omega_1 - \omega_0|^{p-2} (\omega_1 - \omega_0) + |\omega_0|^{p-2} \omega_0 - \frac{1}{p-2} \omega_0, \\ 0 = \mathfrak{D}_p \omega_k + |\omega_k|^{p-2} \omega_k - \frac{1}{p-2} \omega_k, \end{cases} \quad k > 0. \quad (1.21)$$

Demostraremos a continuación que estos perfiles discretos convergen uniformemente a los correspondientes perfiles continuos. Además veremos que, como se aprecia en la Figura 1.1, cuanto mayor es el dato inicial  $\omega_0$ , estos perfiles cortan al eje en un valor cada vez más proximo a  $L_p$ , el valor para el cual el primer autovalor es uno.

Admitamos por un momento que existe una altura  $\omega_0$  tal que para  $h$  suficientemente pequeño, el correspondiente perfil y nuestro dato inicial tienen un único corte, es decir, se cumple

$$\omega_j \geq T_h^{\frac{1}{p-2}} \varphi(x_j), \quad \forall j < k_0, \quad \omega_{k_0} < T_h^{\frac{1}{p-2}} \varphi(x_{k_0}) \quad \text{y} \quad \omega_j \leq T_h^{\frac{1}{p-2}} \varphi(x_j), \quad \forall j > k_0, \quad (1.22)$$

para algún único  $0 \leq k_0 \leq N$ . Consideremos las soluciones de (1.13) dadas por  $U_h$  e  $Y_h = (T_h - t)^{-1/(q-2)} W_h$ . Como ambas funciones explotan al mismo tiempo por el Lema 1.11 sabemos que el número de intersecciones entre ellas no puede ser cero. Por otra parte,  $\omega_J(t) < y_J(t)$ , para todo  $t > 0$ . Nos encontramos entonces en las hipótesis del Lema 1.10 con  $t^* = 0$ , luego el número de intersecciones de  $U_h$



**Figura 1.1:** Perfiles discretos para distintos datos iniciales.

e  $Y_h$  es exactamente uno, para todo  $t > 0$ . Por lo tanto concluimos que  $u_0(t) \leq y_0(t) = w_0(T_h - t)^{-1/(q-2)}$ , donde  $w_0$  es independiente de  $h$ . Y con ello finalizamos la prueba del teorema.  $\square$

Antes de demostrar la existencia de  $\omega_0$  verificando (1.22), estudiaremos los perfiles discretos  $W_h$ .

**Lema 1.18** *Sea  $W_h$  la solución de (1.21). Si el dato inicial  $w_0$  es suficientemente grande entonces existe un nodo  $x_J$  tal que  $w_J < 0$  y  $w_{k-1} > w_k$  para  $1 < k < J$ . Es más, cuando  $h$  tiende a cero  $W_h$  tiende a la solución del problema*

$$\begin{cases} (|z'|^{p-2}z')' + |z|^{p-2}z - \frac{1}{p-2}z = 0, & x > 0, \\ z(0) = w_0, \\ z'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

**Demostracion.** Probamos que existe un nodo tal que los perfiles discretos se hacen negativos en varios pasos.

• Multiplicando cada ecuación de (1.21) por  $(\omega_{j+1} - \omega_{j-1})/2$  y sumando las mismas, conseguimos, para todo  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^k \left\{ \mathfrak{D}_p \omega_j + \omega_j^{p-1} - \frac{1}{p-2} \omega_j \right\} \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left| \frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{h} \right|^p + F(\omega_{k+1}) - F(\omega_0) + O(h), \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde  $F(x) = \frac{1}{p}x^p - \frac{1}{2(p-2)}x^2$ , véase por ejemplo [BL1].

• A continuación demostramos que el problema (1.24) no tiene mínimos positivos. Notemos que si  $w_0$  es grande, por la primera ecuación en (1.21) tendremos que  $w_1 < w_0$ . Supongamos que exista un nodo  $x_K$  tal que  $w_{K-1} > w_K < w_{K+1}$ . De la ecuación (1.21) en el nodo  $x_K$  llegamos a

$$\frac{1}{p-2} \omega_K - \omega_K^{p-1} = \mathfrak{D}_p \omega_K > 0.$$

Luego  $w_K \leq (p-2)^{-1/(p-2)}$ , lo cual implica que  $F(\omega_K) < 0$ . De la misma ecuación también se deduce

$$h^{-p}(\omega_K - \omega_{K-1})^{p-1} \leq \frac{1}{p-2} \omega_K - \omega_K^{p-1} \leq C,$$

y en consecuencia  $((w_K - w_{K-1})/h)^{p-1} \leq Ch$ . Substituyendo esta desigualdad en (1.24) finalmente obtenemos  $F(\omega_K) = F(\omega_0) + O(h)$ , lo que nos conduce a contradicción ya que  $\omega_0$ , y por tanto  $F(\omega_0)$ , es grande.

• Demostramos que debe existir entonces un nodo  $x_{j_0}$  tal que  $F(\omega_{j_0}) \leq 0$ . Si por el contrario  $F(\omega_k) > 0$ , para todo  $k$ , o lo que es lo mismo

$$w_k > \left( \frac{p}{2(p-2)} \right)^{\frac{1}{p-2}} > \left( \frac{1}{(p-2)} \right)^{\frac{1}{p-2}}$$

para todo  $k \geq 0$ , las funciones  $V(t) = (T_h - t)^{-1/(p-2)}W_h$  y  $\tilde{V}(t) = (T_h - t)^{-1/(p-2)}(p-2)^{-1/(p-2)}$  estarían ordenadas teniendo el mismo tiempo de explosión, lo que contradice el Lema 1.11.

• Probamos finalmente que ha de existir un nodo donde el perfil discreto sea negativo. Supongamos que  $\omega_{j_0}, \omega_{j_0+1}$  son positivos. Como  $W_h$  es decreciente se tiene que  $F(\omega_{j_0+1}) < 0$ , lo que por (1.24) implica

$$\omega_{j_0+1} \leq \omega_{j_0} - Ch(F(\omega_0))^{\frac{1}{p}} < 0,$$

ya que  $\omega_{j_0}$  está acotado. Esto implica que para cada  $h$  fijo, debe existir un primer nodo  $x_J$  tal que  $\omega_J < 0$ .

Para probar la convergencia de estos perfiles notemos que, por (1.24) para el nodo  $x_J$  anterior debe existir una sucesión  $h_n \rightarrow 0$  y  $\tilde{L} > 0$  tal que  $x_J \rightarrow \tilde{L}$ ,  $w_J \rightarrow 0$  y  $(\omega_J - \omega_{J-1})/h_n \rightarrow -\Lambda = -\left(\frac{p}{p-1}F(\omega_0)\right)^{\frac{1}{p}} < 0$ .

Así pues, consideremos el problema auxiliar

$$\begin{cases} (|z'|^{p-2}z')' + z^{p-1} - \frac{1}{p-2}z = 0, & x \in [0, \tilde{L}], \\ z(0) = \omega_0, \\ z(\tilde{L}) = 0. \quad z'(\tilde{L}) = -\Lambda. \end{cases} \quad (1.25)$$

Se sabe que este problema tiene una única solución para cada longitud  $\tilde{L}$ . Utilizando resultados clásicos para ecuaciones parabólicas, ver por ejemplo [Fr], tenemos la convergencia de  $W_h$  a  $z$  en  $(0, \tilde{L}]$ . Además, teniendo en cuenta que en el punto de degeneración  $x = 0$ , se cumple que  $\omega_0 = z(0)$ , la convergencia es cierta en el intervalo entero.

Por otra parte, multiplicando por  $z'$  la ecuación en (1.25) obtenemos

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) |z'|^p + F(z) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \Lambda^p.$$

Recordando que  $F(\omega_0) = (1 - 1/p)\Lambda^p$ , la igualdad anterior implica  $z'(0) = 0$ , completándose la prueba del lema.  $\square$

Por último, la demostración de la existencia de  $\omega_0$  tal que se verifique (1.22) la haremos en varios pasos.

- Para un valor preciso de  $\omega_0$  el problema (1.23) tiene una única solución débil de soporte compacto  $[0, L_\alpha]$ , véase [G2]. Además, para  $\omega_0$  grande existe una única solución clásica que cruza el eje horizontal en un punto finito  $x_*$ , y a medida que  $\omega_0$  crece, el punto  $x_*$  decrece; si  $\omega_0 \rightarrow \infty$  entonces  $x_* \rightarrow L_p$ , donde  $L_p$  es la longitud del intervalo para la cual el primer autovalor del problema (1.2) es igual a uno. Véase [FO].

- Así pues, para cualquier dato inicial acotado  $\varphi$  existe una condición inicial  $z(0) = \omega_0$  suficientemente grande,  $z(0) > T_h^{\frac{1}{p-2}} \varphi(0)$  y tal que el perfil correspondiente  $z$  interseca a  $\varphi$  una única vez, en cierto punto  $x < L$ .

- Por el lema previo, sabemos que  $W_h$  converge hacia el perfil  $z$ , luego para  $h$  suficientemente pequeño, se cumple (1.22).

A continuación centramos nuestra atención en el tiempo de explosión del problema aproximado y estudiamos la convergencia del mismo al tiempo de explosión del problema continuo.

**Demostración del Teorema 1.4.** Como  $u$  explota por la Proposición 1.16 sabemos que para  $h \ll 1$  también  $U_h$  explota. De (1.6) se sigue que existe una

constante  $C$  independiente de  $h$  tal que

$$T_h - t \leq C u_0^{2-q}.$$

Por otro lado, como  $u$  explota en tiempo  $T$  podemos elegir  $t_0$  tal que

$$T - t_0 \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad u(0, t_0) > C_1 \varepsilon^{-1/(q-2)}.$$

Si  $h$  es suficientemente pequeño, por el resultado de convergencia tenemos que  $u_0(t_0) > C_1 \varepsilon^{-1/(q-2)}/2$  y por tanto,  $T_h - t_0 < C\varepsilon$ .

Finalmente,  $|T_h - T| \leq |T_h - t_0| + |T - t_0| < C\varepsilon$ , lo que concluye la continuidad del tiempo de explosión respecto de la longitud de malla.  $\square$

## 1.5 Conjuntos de explosión

Llegados a este punto, centramos nuestro interés en determinar el conjunto de explosión de la solución numérica. Para  $h$  fijo queremos encontrar el conjunto de nodos  $x_k$  tales que  $u_k(t) \rightarrow +\infty$  cuando  $t \nearrow T_h$ . Llevaremos a cabo esta tarea por medio de las variables autosimilares,

$$Y_h(s) = (T_h - t)^{1/(q-2)} U_h(t), \quad (T_h - t) = e^{-s}, \quad (1.26)$$

las cuales trasforman nuestro sistema en el siguiente

$$\begin{cases} y'_0(s) = -2e^{-s\frac{q-p}{q-2}} h^{-p} (y_0(s) - y_1(s))^{p-1} + y_0^{q-1}(s) - \frac{1}{q-2} y_0(s), \\ y'_k(s) = e^{-s\frac{q-p}{q-2}} \mathfrak{D}_p y_k(s) + y_k^{q-1}(s) - \frac{1}{q-2} y_k(s), \\ y_N(s) = 0. \end{cases} \quad 0 < k < N, \quad (1.27)$$

**Demostración del Teorema 1.5.** Comenzamos con el caso  $q > p$ , para el cual la reacción es más fuerte que la difusión. De (1.20) se sigue que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} y_0(s) = C_q = (q-2)^{-1/(q-2)}.$$

Para los restantes nodos se puede probar que  $y_k(s) \rightarrow 0$ , para todo  $k \neq 0$ . Posponemos hasta el Apéndice la prueba de este hecho.

A continuación describimos brevemente la forma en que se propaga la explosión de la solución numérica, basándonos en las ideas de [GR1], (véase el Apéndice

para más detalles). Usando que  $Y_h(s) = (y_0(s), y_1(s), \dots, y_N(s)) \rightarrow (C_q, 0, \dots, 0)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ , en la expresión que verifica  $y_1'(s)$  se obtiene

$$y_1'(s) \sim C e^{-s \frac{p-q}{q-2}} - \frac{1}{q-2} y_1(s).$$

Por tanto, integrando llegamos a

$$0 \leq y_1(s) \sim \begin{cases} C e^{-s \frac{q-p}{q-2}}, & q < p+1, \\ C s e^{-s \frac{1}{q-2}}, & q = p+1, \\ C e^{-s \frac{1}{q-2}}, & q > p+1, \end{cases} \quad (1.28)$$

donde se observa fácilmente en todos los casos que efectivamente  $y_1(s) \rightarrow 0$ . Este comportamiento, en términos de  $U_h$  da

$$u_1(t) \sim \begin{cases} C (T_h - t)^{\frac{q-p-1}{q-2}}, & q < p+1, \\ -C \ln(T_h - t), & q = p+1, \\ C, & q > p+1, \end{cases}$$

lo cual demuestra que si  $q \leq p+1$  el nodo  $u_1(t)$  explota con diferente tasa que  $u_0$ , y para  $q > p+1$  incluso está acotado.

Aún más, una vez conocido el comportamiento asintótico de un nodo podemos deducir el comportamiento de los siguientes nodos repitiendo el procedimiento anterior, el cual también nos da el número de nodos que explotan. Se obtiene que éste lo da el único entero  $K$  que satisface la siguiente expresión,

$$\frac{\sum_{i=0}^{K+1} (p-1)^i}{\sum_{i=0}^K (p-1)^i} < q-1 \leq \frac{\sum_{i=0}^K (p-1)^i}{\sum_{i=0}^{K-1} (p-1)^i},$$

es decir

$$K = \left\lceil \frac{\ln((q-2)/(q-p))}{\ln(p-1)} \right\rceil. \quad (1.29)$$

Consideramos ahora el caso  $q = p$ . Probamos la convergencia de la función  $Y_h(s)$  en (1.26) a un perfil estacionario. Para ello, definimos el siguiente funcional

$$\Phi(Y(s)) = -\frac{1}{p} \langle \mathcal{D}_p Y(s), Y(s) \rangle - \frac{1}{p} \langle Y(s)^{p-1}, Y(s) \rangle + \frac{1}{2(p-2)} \langle Y(s), Y(s) \rangle,$$

análogo al funcional de Lyapunov del problema continuo, y que es también decreciente sobre las órbitas. Utilizando teoría clásica de ecuaciones parabólicas, véase

por ejemplo [Fr], se puede demostrar fácilmente que las soluciones convergen a un estado estacionario. Esto es,  $Y_h(s) \rightarrow S_h(t) = (T_h - t)^{-1/(p-2)} W_h$ , donde el perfil  $W_h = (\omega_k)$  satisface

$$\begin{cases} 0 = 2h^{-p}|\omega_1 - \omega_0|^{p-2}(\omega_1 - \omega_0) + |\omega_0|^{p-2}\omega_0 - \frac{1}{p-2}\omega_0, \\ 0 = \mathfrak{D}_p \omega_k + |\omega_k|^{p-2}\omega_k - \frac{1}{p-2}\omega_k, \\ 0 = \omega_N. \end{cases} \quad k > 0, \quad (1.30)$$

Además, comenzando con un dato inicial  $Y_h(0)$  decreciente y no negativo, entonces para  $s$  fijo, el vector  $Y_h(s)$  es también decreciente y no negativo. Luego buscamos una solución no creciente de (1.30).

Dicha solución ha de ser positiva para todo  $0 < k < N$ . De no ser así, es decir, si  $\omega_j = 0$  para algún  $0 < j < N$ , tendríamos que  $\omega_k = 0$  para todo  $k \geq j$ , ya que  $W_h$  es no creciente y no negativo, lo cual implica además que  $\omega_k = 0$  para todo  $k$ . Pero esto no es posible porque  $\omega_0 > 0$ .

Por lo tanto, en las variables originales se tiene

$$u_k \sim (T_h - t)^{-1/(p-2)} \omega_k \rightarrow \infty, \quad 0 < k < N.$$

De esta forma hemos obtenido explosión global para todo  $L > L_p$ , lo que nos da el conjunto de explosión esperado si  $L_p < L \leq L_\alpha$ , siendo  $L_\alpha$  la longitud máxima de existencia para los perfiles autosimilares positivos (véanse [G2] y [CPE1]).

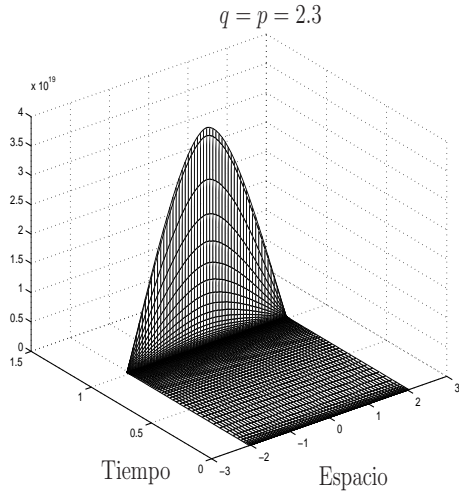
Con el fin de estudiar con más detalle el caso  $L > L_\alpha$ , y la relación del resultado anterior con el resultado de explosión regional conocido para el caso continuo, demostramos que para todo nodo  $x_k$  dentro del intervalo  $[L_\alpha, L]$ , tenemos que  $\omega_k \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Este hecho es una consecuencia del resultado de convergencia de los perfiles discretos al único perfil continuo que satisface (1.23), y tal que  $z(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [0, L]$  y  $z(L) = 0$ . Esta convergencia se puede probar de forma similar al resultado de convergencia en la sección previa (véase además [FGR2]) y nos permite recuperar en este sentido la explosión regional. Con ello damos fin a la prueba del Teorema 1.5.  $\square$



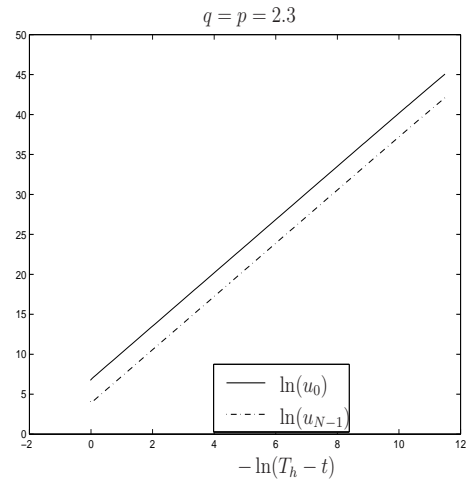
## 1.6 Experimentos numéricos

En esta sección ilustramos los resultados obtenidos a lo largo del capítulo con algunos experimentos numéricos, los cuales muestran algunas de las propiedades observadas para las soluciones numéricas. En todos los casos tomamos como dato inicial la función  $\varphi(x) = L^2 - x^2$ . Para realizar la integración en tiempo usamos un método adaptivo para problemas stiff (Matlab ODE23s).

En primer lugar tratamos el caso  $q = p$ . La Figura 1.2 muestra la evolución de la solución numérica correspondiente a los valores  $q = p = 2.3$  y  $L = 2$ , cuyo tiempo de explosión resulta ser  $T_h = 4.993189$ . En la Figura 1.3 representamos  $\ln(u_i)$  con respecto a  $-\ln(T_h - t)$  para  $i = 0, N - 1$  y demostrar así que, con nuestro esquema numérico, todo nodo explota y lo hace con la misma tasa.



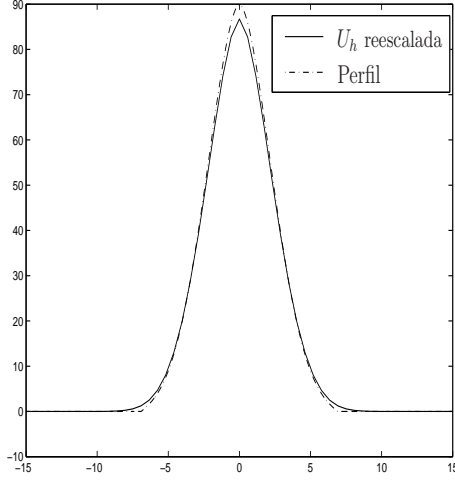
**Figura 1.2:** Evolución de la solución numérica ( $q = p$ ,  $L < L_1$ ).



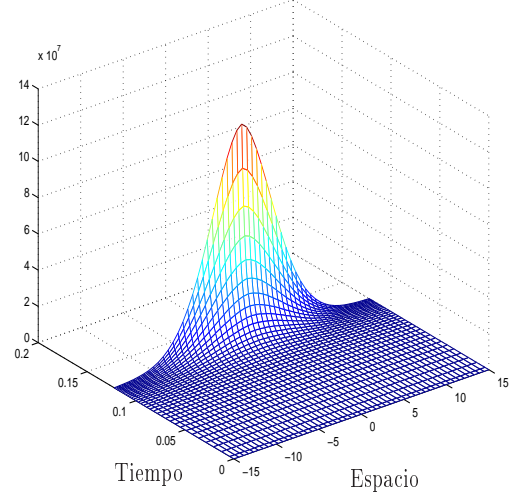
**Figura 1.3:** Tasa de explosión ( $q = p$ ).

Sin embargo, para valores mayores de  $L$  esperamos explosión regional. Para ver este hecho consideramos  $q = p = 2.3$  y  $L = 15$ . En la Figura 1.4 comparamos la solución discreta rescalada en variables autosimilares cerca del tiempo de explosión  $T_h$  con el perfil autosimilar. En este dibujo se puede apreciar que, en los nodos que se encuentran fuera del conjunto de explosión esperado para la solución continua, la solución discreta rescalada, aunque positiva, es muy pequeña comparada con el valor que toma en los nodos centrales. Y es en este sentido en el que recuperamos

la explosión regional para la solución numérica, cuya evolución se representa en la Figura 1.5.



**Figura 1.4:** Solución rescalada cerca de  $T_h$  y el perfil autosimilar.

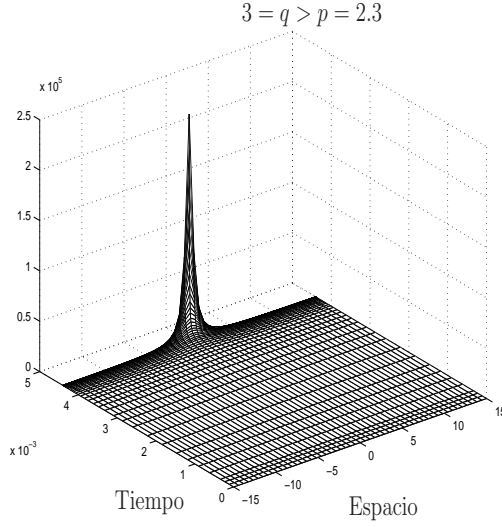


**Figura 1.5:** Evolución de la solución numérica ( $q = p$ ,  $L > L_1$ ).

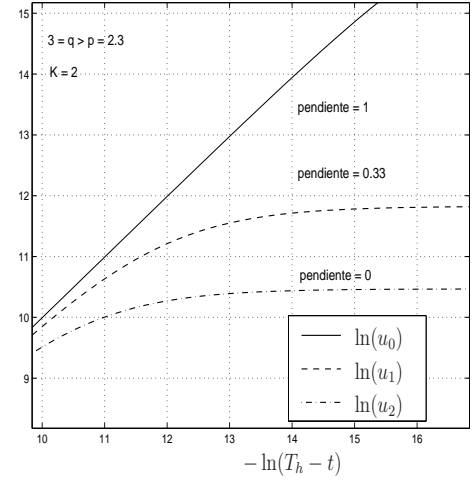
Para finalizar, consideramos el caso  $q = 3$ ,  $p = 2.3$ . Encontramos que el tiempo de explosión correspondiente es  $T_h = 0.00441$  y  $K = 1$ . Describimos la evolución de la aproximación numérica en la Figura 1.6. Con el fin de obtener la tasa y el conjunto de explosión, en la Figura 1.7 representamos nuevamente  $\ln(u_i)$  con respecto a  $-\ln(T_h - t)$  para  $i = 0, 1, 2$ . Se puede observar cómo la primera curva (correspondiente a  $\max u_k = u_0$ ) tiene pendiente 1, la segunda (correspondiente a  $u_1$ ) tiene pendiente 0.3 y la última (correspondiente a  $u_2$ ) tiene pendiente cero. En particular este hecho significa que el tercer nodo ( $u_2$ ) no explota y que los dos primeros lo hacen pero con distinta tasa. Este comportamiento coincide con los resultados anteriores descritos en las secciones previas.

## Apéndice

Incluimos en este apartado las demostraciones que, para facilitar su lectura, omitimos a lo largo del presente capítulo.



**Figura 1.6:** Evolución de la solución numérica ( $q > p$ )



**Figura 1.7:** Si  $3 = q > p = 2.3$  el número de nodos en los que explota es  $K = 2$ .

**Demostración del Lemma 1.14** Demostramos (1.14) probando que  $H(u(t)) \geq 0$ , para todo  $t \in (0, T)$ , entonces existe  $C > 0$  tal que  $u(x, t) \leq C$ , para todo  $t \in (0, T)$ . De no ser así, existiría  $t_n \in (0, T)$ ,  $\{t_n\} \rightarrow T$ , tal que  $M_n =: \|u(\cdot, t_n)\|_\infty \rightarrow \infty$ . Sea  $x_n \in [0, L]$  tal que  $M_n/2 \leq u(x_n, t_n) \leq M_n$ . Consideramos

$$v_n(y, \tau) = a_n^{\frac{p}{q-p}} u \left( x_n + a_n y, t_n + a_n^{\frac{p(q-2)}{q-p}} \tau \right),$$

con  $a_n^{\frac{p}{q-p}} = M_n^{-1}$ . Se comprueba fácilmente que  $v_n$  verifica

$$(v_n)_\tau = \left( |(v_n)_y|^{p-2} (v_n)_y \right)_y + v_n^{q-1}, \quad \text{en } \left[ -\frac{x_n}{a_n}, \frac{L - x_n}{a_n} \right] \times \left[ -t_n a_n^{\frac{p(q-2)}{q-p}}, 0 \right].$$

Por otro lado, tenemos que

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L |u_t(x, t)| dx dt \leq H(u(t_0)) - H(u(t_1)) \leq H(u(t_0)),$$

since  $H(u(t)) \geq 0$ .

Para todo  $t \in (0, T)$  se tiene

$$\begin{aligned} \int \int |(v_n)_\tau|^2 dy d\tau &= a_n^{\frac{2p(q-1)}{q-p}} \int \int |u_t(x_n + a_n y, t_n + a_n^{\frac{p(q-2)}{q-p}} \tau)|^2 dy d\tau \\ &= a_n^{\frac{q(p-1)+p}{q-p}} \int \int |u_t(x, t)|^2 dx dt \leq a_n^{\frac{q(p-1)+p}{q-p}} H(\varphi). \end{aligned}$$

Luego  $v_\tau \equiv 0$  y como  $v(0) \geq 1/2$ ,  $v$  es una solución no negativa de

$$0 = \left( |(v_n)_y|^{p-2} (v_n)_y \right)_y + v_n^{q-1}, \quad \text{en } \left[ -\frac{x_n}{a_n}, \frac{L-x_n}{a_n} \right] \times \left[ -t_n a_n^{\frac{-p(q-2)}{q-p}}, 0 \right],$$

lo cual no es posible para  $n$  suficientemente grande.  $\square$

**Demostración del Teorema 1.17** Consideremos la caracterización del primer autovalor del problema continuo (1.2) como la solución al siguiente problema de minimización,

$$\lambda_1(L) = \inf_{\psi \in W_0^{1,p}([-L,L])} \left\{ \int_{-L}^L |\nabla \psi|^p dx : \int_{-L}^L |\psi|^p dx = 1 \right\}. \quad (1.31)$$

Además, el correspondiente primer autovalor discreto del problema (1.4) satisface

$$\lambda_1(L, h) = \inf_{\psi_h \in V_h} \left\{ \int_{-L}^L |\nabla \psi_h|^p dx : \int_{-L}^L |\psi_h|^p dx = 1 \right\}, \quad (1.32)$$

donde  $V_h$  se trata de la aproximación usual del espacio  $W_0^{1,p}$  por elementos finitos considerada en la Sección 1.2.

Sea  $\psi$  un extremal para (1.31), es decir, una solución de (1.2). Probamos que existe una constante  $C$  independiente de  $h$  tal que, para todo  $h$  suficientemente pequeño, se cumple

$$|\lambda_1(L) - \lambda_1(L, h)| \leq C \inf_{v \in V_h} \|\nabla(\psi - v)\|_p^p.$$

De la inclusión  $V_h \subset W_0^{1,p}$  se deduce que

$$\lambda_1(L) \leq \lambda_1(L, h). \quad (1.33)$$

Elijamos ahora  $v \in V_h$  de tal modo que

$$\|\nabla(\psi - v)\|_p^p \leq \inf_{\omega \in V_h} \|\nabla(\psi - \omega)\|_p^p + \epsilon.$$

Si  $\psi_h$  es un extremal para (1.32), se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_1(L, h)^{1/p} &= \|\nabla \psi_h\|_p \leq \frac{\|\nabla v\|_p}{\|v\|_p} \\ &\leq \frac{\|\nabla(v - \psi)\|_p + \|\nabla \psi\|_p}{\|v\|_p} = \frac{\|\nabla(v - \psi)\|_p + \lambda_1(L)^{1/p}}{\|v\|_p}. \end{aligned}$$

Usando las estimaciones

$$1 - \|v\|_p \leq |||v||_p - 1| = |||v||_p - \|\psi\|_p| \leq \|v - \psi\|_p \leq C\|\nabla(v - \psi)\|_p,$$

y el hecho de que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v \in V_h} \|v - \psi\|_{W_0^{1,p}} = 0,$$

tenemos que para todo  $h$  suficientemente pequeño

$$\lambda_1(L, h) \leq \left( \frac{\|\nabla(v - \psi)\|_p + \lambda_1(L)^{1/p}}{1 - C\|\nabla(v - \psi)\|_p} \right)^p \leq \lambda_1(L) + C\|\nabla(v - \psi)\|_p. \quad (1.34)$$

De (1.33) y (1.34) se obtiene el resultado deseado:

$$|\lambda_1(L) - \lambda_1(L, h)| = \lambda_1(L, h) - \lambda_1(L) \leq C \inf_{v \in V_h} \|\nabla(\psi - v)\|_p^p$$

□

En lo que sigue de este apartado consideramos el problema (1.27) y probamos que el único nodo que se comporta como  $C_q(T_h - t)^{-1/(q-2)}$  es  $x = 0$ . La demostración se llevará a cabo en varias etapas.

**Lema 1.19** *Supongamos que existe un tiempo  $s_0$  tal que*

$$y_k^{q-1}(s_0) - \frac{1}{q-2}y_k(s_0) < -Ce^{-s_0 \frac{q-p}{q-2}}. \quad (1.35)$$

*Entonces  $y_k(s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .*

**Demostracion.** Teniendo en cuenta (1.27) se deduce

$$y'_k(s) \leq Ce^{-s \frac{q-p}{q-2}} - \frac{1}{q-2}y_k(s) + y_k^{q-1}(s).$$

Sea  $\phi(s)$  solución del siguiente problema

$$\begin{cases} \phi'(s) = Ce^{-s \frac{q-p}{q-2}} - \frac{1}{q-2}\phi(s) + \phi^{q-1}(s), \\ \phi(s_0) = y_k(s_0). \end{cases} \quad (1.36)$$

Nótese que por comparación  $0 \leq y(s) \leq \phi(s)$ . Por otro lado, la estimación (1.35) implica que  $\phi'(s_0) < 0$  y  $\phi(s_0) < C_q$ .

A continuación veamos que  $\phi'(s) < 0$  para todo  $s \geq s_0$ . Razonando por contradicción, supongamos que existe un primer tiempo  $s_1$  tal que  $\phi'(s_1) = 0$ . En ese tiempo tendríamos

$$\phi''(s_1) = -Ce^{-s_1 \frac{q-p}{q-2}} - \frac{1}{q-2}\phi'(s_1) + (q-1)\phi^{q-2}(s_1)\phi'(s_1) = -Ce^{-s_1 \frac{q-p}{q-2}} < 0.$$

Luego  $\phi'$  es decreciente en  $s_1$ , lo que es una contradicción. Hemos probado así que  $\phi(s)$  es decreciente para todo  $s \geq s_0$ . Además  $\phi(s) \geq 0$ , luego existe  $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s) = a$ . Es más, este límite verifica  $a^{q-1} - \frac{a}{q-2} = 0$ , ya que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi'(s) = 0$ . Como tenemos que  $\phi(s_0) < C_q$  y es decreciente para  $s \geq s_0$ , deducimos que  $a \neq C_q$ , y en consecuencia  $a = 0$ . Concluimos la prueba observando que  $0 \leq y_k(s) \leq \phi(s) \rightarrow 0$ , cuando  $s \rightarrow \infty$ . □

**Lema 1.20** *Supongamos que existe un tiempo  $s_0$  tal que*

$$y_k^{q-1}(s_0) - \frac{1}{q-2}y_k(s_0) > Ce^{-s_0 \frac{q-p}{q-2}}. \quad (1.37)$$

*Entonces  $y_k(s)$  explota en tiempo finito.*

**Demostracion.** Por (1.27) se tiene

$$y'_k(s) \geq -Ce^{-s \frac{q-p}{q-2}} - \frac{1}{q-2}y_k(s) + y_k^{q-1}(s).$$

Sea  $\phi$  una solución del problema (1.36). Obsérvese que  $\phi(s_0) > C_q$  y  $\phi'(s_0) > 0$ . Razonando como en el lema anterior podemos probar que  $\phi(s)$  es decreciente para todo  $s \geq s_0$ , lo cual asegura que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\phi'(s) \geq \varepsilon\phi^{q-1}(s)$ . Como  $q > 2$  tenemos que  $\phi$  explota en cierto tiempo  $s^*$ . Nuevamente por comparación  $y_k(s) \geq \phi(s) \rightarrow \infty$ , cuando  $s \rightarrow s^*$ , e  $y_k$  explota en tiempo finito. □

Como consecuencia de ambos lemas obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 1.21** *Sea  $Y_h(t)$  una solución del problema (1.27). Entonces, cuando  $s \rightarrow \infty$  el límite de cada  $y_k(s)$  verifica*

$$y_k(s) \rightarrow 0, \quad \text{o bien} \quad y_k(s) \rightarrow C_q.$$

**Demostracion.** Por (1.6) sabemos que  $y_k(s)$  está acotada. De los dos lemas anteriores, si  $y_k(s)$  no converge a cero y no explota en tiempo finito, se deduce

$$Ce^{-s\frac{q-p}{q-2}} \geq y_k^{q-1}(s) - \frac{1}{q-2}y_k(s) \geq -Ce^{-s\frac{q-p}{q-2}}.$$

Entonces

$$y_k^{q-1}(s) - \frac{1}{q-2}y_k(s) \rightarrow 0, \text{ cuando } s \rightarrow \infty.$$

Dado que  $y_k(s)$  es continua, acotada y por hipótesis no converge a cero, concluimos que  $y_k(s) \rightarrow C_q$ .  $\square$

Además probamos que el origen es el único nodo que se comporta de esta manera.

**Lema 1.22** *Sea  $Y_h(t)$  una solución del problema (1.27). Entonces  $y_k(s) \rightarrow C_q$ , cuando  $s \rightarrow \infty$ , si y sólo si  $k = 0$ .*

**Demostracion.** Como consecuencia inmediata del Corolario 1.21 y de la estimación (1.6) del Teorema 1.3 sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow T_h} (T_h - t)^{\frac{1}{q-2}} u_0(t) = C_q. \quad (1.38)$$

Supongamos que también se verifica el límite anterior (1.38) para los nodos adyacentes,  $k = 1, -1$  (recordemos que por la simetría del dato inicial  $u_1(t) = u_{-1}(t)$  para todo  $t \geq 0$ ), es decir,

$$\lim_{t \rightarrow T_h} (T_h - t)^{\frac{1}{q-2}} u_{-1}(t) = \lim_{t \rightarrow T_h} (T_h - t)^{\frac{1}{q-2}} u_1(t) = C_q. \quad (1.39)$$

Restando las ecuaciones para los nodos  $k = 0, 1$  tenemos

$$\begin{aligned} (u_0 - u_1)'(t) &= \frac{1}{h^p} \left( -3(u_0(t) - u_1(t))^{p-1} + (u_1(t) - u_2(t))^{p-1} \right) \\ &\quad + u_0^{q-1}(t) - u_1^{q-1}(t) \\ &\geq \left( \frac{-3}{h^p} (u_0(t) - u_1(t))^{p-2} + (q-1)\eta^{q-2}(t) \right) (u_0(t) - u_1(t)), \\ &\geq \left( \frac{-3}{h^p} u_0^{p-2}(t) + (q-1)\eta^{q-2}(t) \right) (u_0(t) - u_1(t)), \end{aligned}$$

donde  $\eta(t)$  resulta de aplicar el Teorema del Valor Medio. Entonces,

$$(\ln(u_0 - u_1))'(t) \geq \frac{-3}{h^p} u_0^{p-2}(t) + (q-1)\eta^{q-2}(t),$$

que integrado entre cierto  $t_0$  y  $t$  da

$$\ln(u_0 - u_1)(t) - \ln(u_0 - u_1)(t_0) \geq \int_{t_0}^t \left( \frac{-3}{h^p} u_0^{p-2}(s) + (q-1)\eta^{q-2}(s) \right) ds. \quad (1.40)$$

Dado que  $u_1(t) \leq \eta(t) \leq u_0(t)$ , de (1.39) se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow T_h} (T_h - t)^{\frac{1}{q-2}} \eta(t) = C_q. \quad (1.41)$$

Usando (1.38) y (1.41) deducimos que

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \left( \frac{-3}{h^p} u_0^{p-2}(s) + (q-1)\eta^{q-2}(s) \right) ds \\ & \geq \int_{t_0}^t \left( \frac{-3(C_q^{p-2} + \varepsilon)}{h^p} (T_h - s)^{-\frac{p-2}{q-2}} + (q-1)(C_q^{q-2} - \varepsilon)(T_h - s)^{-1} \right) ds \\ & \geq \frac{-C(C_q^{p-2} + \varepsilon)}{h^p} (T_h - t)^{\frac{q-p}{q-2}} - (q-1)(C_q^{q-2} - \varepsilon) \ln(T_h - t) - C \\ & = \frac{-C(C_q^{p-2} + \varepsilon)}{h^p} (T_h - t)^{\frac{q-p}{q-2}} - (q-1)\varepsilon \ln(T_h - t) \\ & \quad - (q-1)(C_q^{q-2} - 2\varepsilon) \ln(T_h - t) - C \\ & \geq -(q-1)(C_q^{q-2} - 2\varepsilon) \ln(T_h - t) - C, \end{aligned} \quad (1.42)$$

para  $t$  suficientemente próximo a  $T_h$ . Tomando exponenciales en (1.40) y (1.42) obtenemos

$$(u_0 - u_1)(t) \geq C(T_h - t)^{-(q-1)(C_q^{q-2} - 2\varepsilon)} = C(T_h - t)^{\frac{-(q-1)}{q-2} + 2(q-1)\varepsilon}.$$

Pero entonces

$$0 = \lim_{t \rightarrow T_h} (T_h - t)^{\frac{-1}{q-2}} (u_0 - u_1)(t) = C \lim_{t \rightarrow T_h} (T_h - t)^{\frac{-q}{q-2} + 2(q-1)\varepsilon} = +\infty,$$

tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, lo cual es una contradicción. Así pues el límite (1.39) no puede ser cierto y, en consecuencia, por el Corolario 1.21 se tiene que  $y_1(s) = y_{-1}(s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . Finalmente, usando el decrecimiento para la solución numérica del Lema 1.13 concluimos que  $y_k(s) \rightarrow 0$  para todo  $k \neq 0$ .  $\square$



Finalizamos el presente apéndice describiendo la forma de propagarse la explosión en el caso  $q > p$ , esto es, la primera parte del Teorema 1.5.

**Demostración del Teorema 1.5** Recordemos la ecuación correspondiente al nodo  $k = 1$ ,

$$y_1'(s) = e^{-s \frac{q-p}{q-2}} h^{-p} \mathfrak{D}_p y_1(s) + y_1^{q-1}(s) - \frac{1}{q-2} y_1(s) \leq C e^{-s \frac{q-p}{q-2}} - \left( \frac{1}{q-2} - \varepsilon \right) y_1(s).$$

Sea  $\psi$  solución del problema

$$\begin{cases} \psi'(s) = C e^{-s \frac{q-p}{q-2}} - \left( \frac{1}{q-2} - \varepsilon \right) \psi(s), \\ \psi(s_0) = y_1(s_0). \end{cases}$$

Por comparación obtenemos

$$y_1(s) \leq \psi(s) = C_1 e^{-s \frac{q-p}{q-2}} + C_2 e^{-s \left( \frac{1}{q-2} - \varepsilon \right)}. \quad (1.43)$$

De la ecuación para el nodo  $k = 1$  también se deduce

$$\left( e^{\frac{1}{q-2}s} y_1(s) \right)' = e^{\frac{1}{q-2}s} \left( e^{-s \frac{q-p}{q-2}} \mathfrak{D}_p y_1(s) + y_1^{q-1}(s) \right),$$

lo que integrado entre  $s_0$  y  $s$  da

$$\begin{aligned} y_1(s) &= e^{-\frac{1}{q-2}s} \left( C + \int_{s_0}^s e^{\frac{1}{q-2}\sigma} \left( e^{-\sigma \frac{q-p}{q-2}} \mathfrak{D}_p y_1(\sigma) + y_1^{q-1}(\sigma) \right) d\sigma \right) \\ &= e^{-\frac{1}{q-2}s} \left( C + \int_{s_0}^s e^{\frac{1-q+p}{q-2}\sigma} \left( \mathfrak{D}_p y_1(\sigma) + e^{-\frac{1-q+p}{q-2}\sigma} y_1^{q-1}(\sigma) \right) d\sigma \right). \end{aligned} \quad (1.44)$$

De (1.43) deducimos que

$$e^{-\frac{1-q+p}{q-2}s} y_1^{q-1}(s) \leq C_1 e^{-\frac{(q-1)(q-1-p)-p}{q-2}s} + C_2 e^{\left[ \frac{-p}{q-2} - \varepsilon(q-1) \right] s} \rightarrow 0,$$

cuando  $s \rightarrow \infty$ . Además, del Corolario 1.22 se sigue que  $h^{-p} \mathfrak{D}_p y_1(s) \rightarrow C \neq 0$ , cuando  $s \rightarrow \infty$ . En consecuencia, si  $p \neq q - 1$  de (1.44) se obtiene

$$y_1(s) \sim e^{-\frac{1}{q-2}s} \left( C + \int_{s_0}^s e^{\frac{1-q+p}{q-2}\sigma} d\sigma \right) \sim C_1 e^{-\frac{1}{q-2}s} + C_2 e^{-\frac{q-p}{q-2}s},$$

mientras que para  $p = q - 1$  se verifica

$$y_1(s) \sim e^{-\frac{1}{q-2}s} (C_1 + C_2 s) \sim C_1 e^{-\frac{q-p}{q-2}s} + C_2 s e^{-\frac{q-p}{q-2}s}.$$

Hemos probado así (1.28). Obsérvese que, para los restantes nodos también se cumple (1.44). Razonando de forma idéntica, al conocer la tasa de explosión del nodo anterior, podemos establecer la siguiente relación de recurrencia para dichas tasas, en el caso  $p > q - 1$  (el caso  $p = q - 1$  puede probarse de forma análoga)

$$\alpha_k = \frac{q - p}{q - 2} + (p - 1)\alpha_{k-1}. \quad (1.45)$$

Deberemos repetir este proceso hasta que para algún nodo suceda que  $\alpha_k \geq \frac{1}{q-2}$ . Sustituyendo el valor de cada  $\alpha_j$  para  $j = 1 \dots k - 1$  en (1.45) es fácil ver que  $K$  es el único entero verificando (1.29), concluyendo la prueba del teorema.  $\square$

---

# *Una ecuación doblemente no lineal con flujo no lineal en la frontera*

Dedicamos el presente capítulo al estudio de las soluciones positivas de una ecuación de tipo parabólico doblemente no lineal con una condición no lineal en la frontera. Analizaremos el problema

$$\begin{cases} (u^m)_t = (|u_x|^{p-2}u_x)_x & (x, t) \in (0, L) \times (0, T) \\ u_x(0, t) = 0, \quad |u_x|^{p-2}u_x(L, t) = u^q(L, t) & t \in (0, T) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x \in [0, L], \end{cases}$$

donde  $0 < m, q < \infty$ , y  $1 < p < \infty$  son parámetros. Se sabe que para algunos valores de estos parámetros existen soluciones que explotan en tiempo finito.

Determinamos en términos de  $m, p$  y  $q$  los conjuntos de explosión de tales soluciones, así como las tasas de explosión.

## Contenido

---

2.1. Introducción . . . . .	54
2.2. Existencia local de soluciones. Estimaciones a priori. . . . .	59
2.3. Explosión regional . . . . .	69
2.4. Explosión global y explosión puntual . . . . .	84
1. Caso $0 < m < q < p-1$ . Explosión global . . . . .	84
2. Caso: $\max \{m, p-1\} < q$ . Explosión puntual . . . . .	84

---

## 2.1 Introducción

Sean  $0 < m, q < \infty$  y  $1 < p < \infty$  dados. Consideremos el problema

$$\begin{cases} (u^m)_t = (|u_x|^{p-2}u_x)_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u_x(0, t) = 0, \quad |u_x|^{p-2}u_x(L, t) = u^q(L, t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (2.1)$$

El dato inicial  $\varphi$  será estrictamente positivo, creciente, convexo y regular.

La ecuación contiene al operador doblemente no lineal, por lo que el coeficiente de difusión degenera cuando  $u_x = 0$ . Así pues nuestro problema no admite soluciones en sentido clásico. Comencemos precisando el significado de solución débil del problema (2.1).

**Definición 2.1** *Por solución débil del problema (2.1) en  $Q = (0, L) \times (0, T)$  entendemos una función  $u \in L^\infty(0, T : W^{1,p}(0, L))$  que verifica*

$$\int_Q \{(\varphi^m - u^m)\zeta_t + |u_x|^{p-2}u_x\zeta_x\} dx dt = \int_0^T u^q(L, t)\zeta(L, t) dt, \quad (2.2)$$

para todo  $\zeta \in L^1(0, T : W^{1,p}(0, L))$  con  $\zeta_t \in L^1(Q)$  y  $\zeta(\cdot, T) = 0$ .

A continuación identificamos las condiciones que garantizan la existencia de solución débil.

**Teorema 2.1** *Sea  $\varphi \in C^3([0, L])$  cumpliendo las condiciones de compatibilidad*

$$\varphi_x(0) = 0, \quad (\varphi_x)^{p-1}(L) = \varphi^q(L). \quad (2.3)$$

*Supongamos que además verifica*

$$\varphi > 0, \quad \varphi_{xx} \geq 0 \quad \text{en } [0, L] \quad (2.4)$$

*y  $\varphi_{xx} > 0$  en un entorno de  $L$ .*

*Entonces existe  $T = T(\varphi)$ ,  $0 < T \leq \infty$  tal que el problema (2.1) tiene una solución débil  $u$  en  $[0, t]$  para cualquier  $t < T$  y  $u \in C([0, L] \times [0, T))$ . Aún más,  $u$  es estrictamente positiva y no decreciente ni en espacio ni en tiempo.*

Además, si el tiempo maximal de existencia,  $T$ , es finito, tenemos

$$\max_{0 \leq x \leq L} u(x, t) = u(L, t) \longrightarrow +\infty \quad \text{cuando } t \rightarrow T. \quad (2.5)$$

En [WWX] se demuestra que el problema (2.1) es resoluble globalmente, esto es,  $T = \infty$ , si y solamente si

$$q \leq \min \left\{ m, \frac{(p-1)(m+1)}{p} \right\},$$

i.e. toda solución del problema (2.1) con  $\varphi$  positiva explota en tiempo finito si

$$q > m \quad \text{o} \quad p q > (p-1)(m+1).$$

En primer lugar observamos que si  $u$  es regular, aplicando el Teorema del Valor Medio, teniendo en cuenta que  $u_x, u_{xx} \geq 0$ , obtenemos:

$$u(L, t) \left[ 1 - (L-x) u^{\frac{q-p+1}{p-1}}(L, t) \right] \leq u(x, t) \leq u(L, t). \quad (2.6)$$

En el Lema 2.6 hacemos riguroso este razonamiento. Por otro lado, la primera desigualdad en (2.6) no aporta información si su primer término es negativo. Este hecho dependerá notablemente del signo del exponente  $\gamma = \frac{q-p+1}{p-1}$ , si tenemos en cuenta que, si las soluciones explotan, éstas se hacen infinitas al menos en el punto  $x = L$ . Como consecuencia directa de esta estimación tenemos los primeros resultados.

- Si  $\gamma < 0$ , es decir,  $q < p-1$ , (y además  $q > m$  para asegurar que haya explosión), el primer término de (2.6) es positivo para todo  $x \in [0, L]$ . Entonces se tiene que  $u(x, t) \sim u(L, t)$  en todo el intervalo, de donde se deduce explosión global en este caso.

- Si  $\gamma = 0$ , esto es,  $q = p-1$ , la estimación (2.6) se expresa ahora

$$(1+x-L)u(L, t) \leq u(x, t).$$

Así pues, si  $L < 1$  podemos tomar  $x = 0$  y la explosión es global. Sin embargo, si  $L \geq 1$ , que el primer término sea positivo limitará la elección de  $x$ . Se puede intuir de este razonamiento el fenómeno de explosión regional, que demostraremos con detalle en la Sección 2.3.

• Si  $\gamma > 0$ , es decir,  $q > p - 1$ , la estimación (2.6) no nos da información en lo que a los conjuntos de explosión se refiere.

En primer lugar haremos un estudio de la explosión regional para las soluciones del problema (2.1), que tiene lugar para el rango  $m < q = p - 1$ .

A continuación exponemos nuestro resultado principal:

**Teorema 2.2** *Consideremos el problema (2.1). Si  $m < q = p - 1$ , entonces tiene lugar explosión regional si  $L > L^* \equiv \frac{p}{p-1-m}$ , siendo el conjunto de explosión  $B(u) = [L - L^*, L]$ . Si  $L \leq L^*$ , entonces la explosión es global.*

El análisis de la explosión en el caso regional resultará algo más delicado que en los restantes casos, como veremos. Abordaremos pues la prueba de este Teorema en varias etapas, que describimos a continuación brevemente.

Comenzaremos determinando mediante argumentos de masa cuál es la tasa de explosión de las soluciones, encontrando que éstas se comportan como

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \sim (T - t)^{\frac{-1}{p-1-m}}.$$

(Dicha demostración será también aplicable al caso de explosión global). Una vez conocida la velocidad de explosión, rescalamos las soluciones en la forma

$$v(x, \tau) = (Te^{-\tau})^{\frac{1}{p-1-m}} u(x, T(1 - e^{-\tau})), \quad \tau = -\ln\left(\frac{T-t}{T}\right),$$

y estudiamos el problema en variables autosimilares que verifican estas soluciones rescaladas. Mediante un funcional de Lyapunov y estimaciones de energía demostramos la convergencia de las soluciones rescaladas a un perfil estacionario.

Nótese que el rescale anterior preserva la variable espacial, lo que implica que la solución  $u$  de nuestro problema original explota al menos en los puntos donde el perfil es positivo, y lo hace además con la tasa de explosión dada por el cambio de escala. Esto es, si denotamos por  $\omega$  el perfil límite, tenemos:

$$(T - t)^{\frac{1}{p-1-m}} u(x, t) = v(x, \tau) \rightarrow \omega(x), \quad \text{cuando } \tau \rightarrow \infty,$$

lo que se traduce en

$$\begin{aligned} \text{supp}(\omega) &\subset B(u) \\ u(x, t) &\sim (T - t)^{\frac{-1}{p-1-m}}, \quad \text{para todo } x \in \text{supp}(\omega). \end{aligned}$$

Estudiamos dichos perfiles mediante un método de disparo, (variando la altura en  $x = 0$ ) y encontramos que, si la longitud del intervalo  $L$  es menor que cierto valor  $L^* = \frac{p}{p-1-m}$ , éstos son estrictamente positivos en  $[0, L]$ . Se deduce entonces de inmediato que  $B(u) = [0, L]$  y con la tasa de explosión dada.

Sin embargo, si  $L \geq L^*$  el soporte de dichos perfiles es el intervalo  $[L - L^*, L]$ . Entonces  $u$  explota al menos en esos puntos, pero ¿qué sucede en  $[0, L - L^*]$ ? Sabemos que si  $x \in [0, L - L^*]$  entonces  $(T - t)^{\frac{1}{p-1-m}} u(x, t) \rightarrow 0$ , pero ¿podrá suceder que  $(T - t)^a u(x, t) \rightarrow c > 0$ , para cierto  $a < \frac{1}{p-1-m}$ ? Para ver que esto no es posible y que, efectivamente  $B(u) = [L - L^*, L]$  seguimos las ideas de [CEV], y demostramos que si  $x \in [0, L - L^*]$ , entonces

$$(Te^{-\tau})^{\frac{1}{p-1-m}} u(x, T(1-e^{-\tau})) = v(x, \tau) \leq Ce^{\frac{-\tau}{p-1-m}}, \quad \forall (x, \tau) \in [0, L - L^*] \times [0, \infty),$$

y claramente  $u \leq C$  en  $[0, L - L^*]$ .

Recapitulando, lo que tenemos hasta el momento es un estudio completo del conjunto y de la tasa de explosión de las soluciones que explotan en los casos  $\gamma = 0$  y  $\gamma < 0$ . Además, para  $\gamma = 0$  estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones, demostrando su convergencia hacia un perfil estacionario. En ambos casos, el exponente de reacción  $q$  ha de ser mayor que  $m$ , para garantizar que haya blow-up.

Sin embargo, en el caso que nos falta,  $\gamma > 0$ , habría que distinguir si  $q > m$  ó si  $pm \geq pq > (p-1)(m+1)$ . Utilizando las técnicas introducidas en [FrM] somos capaces de probar que si  $q > m$ , el conjunto de explosión se reduce al punto  $x = L$  y damos una estimación inferior de la tasa de explosión. Si además  $m \geq 1$ , encontramos la estimación superior de la tasa.

Estas técnicas no son aplicables para  $m \geq q > \frac{(p-1)(m+1)}{p}$ , quedando este rango de exponentes como un problema abierto. Conjeturamos no obstante que la explosión es puntual para estos valores de los exponentes.

En el siguiente teorema englobamos los resultados obtenidos para los casos  $\gamma \neq 0$ .

**Teorema 2.3** *Sea  $u$  una solución débil del problema (2.1)*

- Si  $0 < m < q < p - 1$ ,

i) las soluciones explotan globalmente.

ii) Además lo hacen con la tasa

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty} \sim (T - t)^{\frac{-1}{q-m}}.$$

- Si  $\max\{m, p - 1\} < q$ ,

iii) entonces existe una constante positiva  $d$  tal que

$$u(L, t) \geq d(T - t)^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{p - 1}{pq - (p - 1)(m + 1)}, \quad (2.7)$$

para cualquier  $(x, t) \in [0, L] \times [0, T)$ . Si además suponemos  $m \geq 1$ , existe una constante positiva  $D$ , tal que

$$u(L, t) \leq D(T - t)^{-\gamma}, \quad (2.8)$$

para cualquier  $t \in [0, T)$ .

iv) Además, existe una constante positiva  $C$  tal que

$$u(x, t) \leq C(L - x)^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{p - 1}{q - p + 1} \quad (2.9)$$

para cualquier  $(x, t) \in [0, L] \times [0, T)$ .

Más aún, existen constantes positivas  $c$  y  $\Lambda$  tales que

$$u(x, t) \geq c(L - x)^{-\alpha} \quad (2.10)$$

para cualquier  $0 \leq x \leq L - \Lambda(T - t)^{\gamma/\alpha}$  y  $t \in [0, T)$ , con  $\gamma$  dado en (2.7).

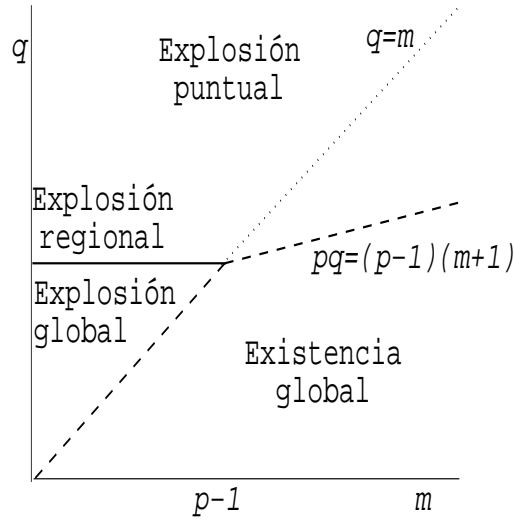
La Figura 2.1 esquematiza los resultados sobre los conjuntos de explosión obtenidos a lo largo de este capítulo. En ella se aprecia que la región de parámetros satisfaciendo

$$p - 1 < \frac{(p - 1)(m + 1)}{p} < q \leq m$$

queda abierta en lo que a conjuntos de explosión se refiere.

Pasamos pues a demostrar los resultados anteriores. Comenzaremos con el resultado de existencia, junto con algunas propiedades y estimaciones básicas de





**Figura 2.1:** Conjuntos de explosión para  $q > m$ .

nuestras soluciones, en la Sección 2. Propiedades que, como ya anunciamos, demuestran explosión global para ciertos valores de los parámetros. La siguiente parte del capítulo la dedicaremos al estudio de la explosión regional. Para finalizar, en la última sección nos ocupamos de la explosión global y puntual, determinando conjuntamente las tasas de explosión.

## 2.2 Existencia local de soluciones. Estimaciones a priori.

Dedicaremos esta sección a probar la existencia local de soluciones del problema (2.1), junto con algunas de sus propiedades de crecimiento y convexidad.

**Demostración del Teorema 2.1.** Demostramos el resultado de existencia en varias etapas.

1. En primer lugar, para  $0 < \varepsilon \ll 1$  planteamos el problema con dato de contorno

en  $x = 0$  modificado

$$\begin{cases} ((u^\varepsilon)^m)_t = ((u_x^\varepsilon)^{p-1})_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, t_0), \\ u_x^\varepsilon(0, t) = \varepsilon, & t \in (0, t_0), \\ (u_x^\varepsilon)^{p-1}(L, t) = (u^\varepsilon)^q(L, t), & t \in (0, t_0), \\ u^\varepsilon(x, 0) = \varphi^\varepsilon(x), & x \in [0, L], \end{cases} \quad (2.11)$$

con  $t_0 > 0$  suficientemente pequeño, donde  $\varphi^\varepsilon$  satisface las condiciones de compatibilidad (2.4),

$$\varphi_x^\varepsilon(x) \geq \varepsilon, \quad \varphi_{xx}^\varepsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, L] \quad (2.12)$$

y

$$\varphi^\varepsilon \nearrow \varphi \quad \text{en } C([0, L]), \quad (2.13)$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Para ver que esto es posible, tomemos

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x - L) \left( 1 - \zeta \left( \frac{x - L}{\ell} \right) \right), \quad 0 \leq x \leq L,$$

donde suponemos que la función auxiliar  $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$  verifica lo siguiente

$$\zeta(y) = \begin{cases} 1 & y \geq -1 \\ 0 & y \leq -2 \end{cases}, \quad \zeta' > 0 \quad \text{en el intervalo } (-2, -1).$$

Si elegimos primero  $\ell > 0$  pequeño y después  $\varepsilon$  pequeño, no es difícil ver que se cumplen (2.12) y (2.13). Más aún, si  $\varepsilon > 0$  es suficientemente pequeño tenemos que

$$0 < \delta \leq \varphi^\varepsilon(x) \leq \varphi(L) \quad \forall x \in [0, L], \quad \delta = \frac{\varphi(0)}{2}.$$

**2.** A continuación consideramos el problema regularizado

$$\begin{cases} b'(u^\varepsilon)u_t^\varepsilon = a'(u_x^\varepsilon)u_{xx}^\varepsilon, & (x, t) \in (0, L) \times (0, t_1), \\ u_x^\varepsilon(0, t) = \varepsilon, & t \in (0, t_1), \\ a(u_x^\varepsilon(L, t)) = g(u^\varepsilon(L, t)), & t \in (0, t_1), \\ u^\varepsilon(x, 0) = \varphi^\varepsilon(x), & x \in [0, L], \end{cases} \quad (2.14)$$

donde  $a, b, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  satisfacen  $b(0) = a(0) = g(0) = 0$ ,

$$\begin{cases} b(v) = v^m & \text{para } \delta \leq v \leq \varepsilon^{-1}, \\ a(z) = z^{p-1} & \text{para } \varepsilon \leq z \leq \varepsilon^{\frac{-q}{p-1}}, \\ g(v) = v^q & \text{para } \delta \leq v \leq \varepsilon^{-1}, \end{cases}$$

y  $0 < \kappa(\varepsilon) \leq b'(v), a'(z), g'(v) \leq \kappa^{-1}(\varepsilon)$  para algún  $\kappa < 1$  y para todo  $v, z \in \mathbb{R}$ .

Con esta elección de no linealidades los resultados de [LSU] (Capítulo V, Teorema 7.4 y consecuencias en pág 492) garantizan la existencia de una solución clásica  $u^\varepsilon$  de (2.14) en  $[0, t_1]$  para  $t_1$  arbitrariamente grande en la clase de funciones  $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}([0, L] \times [0, t_1])$  para algún  $0 < \alpha < 1$ .

En los dos siguientes lemas veremos que las soluciones del problema (2.14) lo son a su vez de (2.11).

**Lema 2.4** *Para cualquier  $M \gg \varphi(L)$  positivo existe un tiempo  $\tau_\varepsilon \in (0, \infty)$ , tales que*

$$\left. \begin{array}{l} i) u_t^\varepsilon(x, t) \geq 0 \\ ii) \delta \leq u^\varepsilon(x, t) \leq M \\ iii) \varepsilon \leq u_x^\varepsilon(x, t) \leq M^{\frac{q}{p-1}} \end{array} \right\} \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau_\varepsilon]. \quad (2.15)$$

**Demostracion.** Esta demostración es extensa y también la llevaremos a cabo en varias etapas. Antes que nada, comencemos observando que, al ser  $u^\varepsilon$  regulares, las estimaciones superiores de (2.15) en  $[0, L] \times [0, \tau_\varepsilon]$  se deducen de forma sencilla.

*Primera Etapa.* Probamos la primera estimación de (2.15).

Siguiendo los razonamientos de [FFL], para  $h > 0$  denotemos

$$U^h(x, t) = \frac{u^\varepsilon(x, t+h) - u^\varepsilon(x, t)}{h}, \quad U_-^h = \min\{U^h, 0\}.$$

Notemos que  $U^h$  satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} b'(u^\varepsilon)U_t^h = a'(u_x^\varepsilon)U_{xx}^h + A_h U_x^h - B_h U^h \quad \text{en } (0, L) \times (0, t_1), \\ U_x^h(0, t) = 0, \\ U_x^h(L, t) = C_h U^h(L, t), \quad t \in (0, t_1), \\ U^h(x, 0) = u_t^\varepsilon(x, 0) + \omega(x, h), \quad x \in [0, L], \end{array} \right. \quad (2.16)$$

donde

$$A_h = \frac{a'(u_x^\varepsilon(x, t+h)) - a'(u_x^\varepsilon(x, t))}{u_x^\varepsilon(x, t+h) - u_x^\varepsilon(x, t)} u_{xx}^\varepsilon(x, t+h) ,$$

$$B_h = \frac{b'(u^\varepsilon(x, t+h)) - b'(u^\varepsilon(x, t))}{u^\varepsilon(x, t+h) - u^\varepsilon(x, t)} u_t^\varepsilon(x, t+h) ,$$

$$C_h = \frac{a^{-1}(g(u^\varepsilon(L, t+h))) - a^{-1}(g(u^\varepsilon(L, t)))}{u^\varepsilon(L, t+h) - u^\varepsilon(L, t)} ,$$

$$u_t^\varepsilon(x, 0) = \frac{a'(\varphi_x^\varepsilon) \varphi_{xx}^\varepsilon}{b'(\varphi^\varepsilon)}(x) \geq 0,$$

$$|\omega(x, h)| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |u_t^\varepsilon(x, s) - u_t^\varepsilon(x, 0)| ds \leq Ch^{\frac{\alpha}{2}},$$

por la continuidad Hölder de  $u_t^\varepsilon(x, \cdot)$ . Ahora, multiplicamos la ecuación (2.16)<sub>1</sub> por  $U_-^h$ , e integramos sobre  $(0, L) \times (0, t)$  para  $0 < t < t_1$ . Integrando por partes y reagrupando convenientemente, llegamos a

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^L \frac{1}{2} b'(u^\varepsilon) (|U_-^h|^2)_\tau dx d\tau = - \int_0^t \int_0^L B^h |U_-^h|^2 dx d\tau \\ & - \int_0^t \int_0^L a'(u_x^\varepsilon) |(U_-^h)_x|^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^L (A^h - (a'(u_x^\varepsilon))_x) U_x^h U_-^h dx d\tau \quad (2.17) \\ & + \int_0^t a'(u_x^\varepsilon(L, \tau)) C^h |U_-^h|^2(L, \tau) d\tau = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Tratemos las integrales anteriores por separado.

- Comenzamos estimando  $I_4$ , para la cual, por las propiedades de  $a$  se tiene

$$I_4 \leq C_1 \int_0^t |U^h|^2(L, \tau) d\tau.$$

A continuación observamos que por teoría de trazas se da la siguiente desigualdad

$$\int_0^t |U^h|^2(L, \tau) d\tau \leq C(\eta) \int_0^L \int_0^t |U^h|^2 d\tau dx + \eta \int_0^L \int_0^t |U_x^h|^2 d\tau dx = J_1 + J_2.$$

Por tanto, para  $\eta$  suficientemente pequeño  $J_2$  se absorbe en  $I_2$ .

- $I_1$  e  $I_2$  se desprecian por ser negativos.
- Para acotar  $I_3$  notemos que

$$A^h - (a'(u_x^\varepsilon))_x = a''(u_x^\varepsilon(x, t)) (u_{xx}^\varepsilon(x, t+h) - u_{xx}^\varepsilon(t, x)) \leq C_2 h^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Entonces  $I_3 = \omega_1(h)$ , con  $\omega_1(h) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

- Por último, nótese que por las propiedades de  $b$  se tiene

$$\int_0^t \int_0^L \frac{1}{2} b'(u^\varepsilon) (|U_-^h|^2)_\tau dx d\tau \geq C_2 \int_0^t \int_0^L (|U_-^h|^2)_\tau dx d\tau. \quad (2.18)$$

Teniendo en cuenta en (2.17) los puntos anteriores, en los cuales las constantes  $C_i = C_i(\|u^\varepsilon\|_{C^{2,1}([0,L] \times [0,T])})$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , obtenemos

$$\int_0^L |U_-^h|^2(x, t) dx \leq C \int_0^t \int_0^L |U_-^h|^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^L |U_-^h|^2(x, 0) + \omega_1(h),$$

donde  $C = C(\|u^\varepsilon\|_{C^{2,1}([0,L] \times [0,T])})$ . Aplicando el Lema de Gronwall se deduce que

$$\int_0^L |U_-^h|^2(x, t) dx \leq e^{Ct} \left( \int_0^L |U_-^h|^2(x, 0) + \omega_1(h) \right),$$

lo cual tomando límite cuando  $h \rightarrow 0$  da

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^L |U_-^h|^2(x, t) dx = e^{Ct} \int_0^L |(u_t^\varepsilon)_-|^2(x, t) dx = 0$$

para cualquier  $t \in [0, t_1]$ , ya que vimos que  $u_t^\varepsilon(x, 0) \geq 0$ . Esto concluye la prueba de  $u_t^\varepsilon(x, t) \geq 0$ .

*Segunda etapa.* Demostremos que  $\varepsilon \leq u_x^\varepsilon(x, t)$ .

Si denotamos por  $w = u_x^\varepsilon - \varepsilon$ , esta función verifica, al menos de manera formal, el problema

$$\begin{cases} b'(u^\varepsilon)w_t = a'(u_x^\varepsilon)w_{xx} - \left( \frac{b''(u^\varepsilon)}{b'(u^\varepsilon)} a'(u_x^\varepsilon)u_x^\varepsilon - a''(u_x^\varepsilon)u_{xx}^\varepsilon \right) w_x, & \text{en } (0, L) \times (0, t_0), \\ w(0, t) = 0, \\ w(L, t) = (u^\varepsilon)^{q/(p-1)}(L, t) - \varepsilon \geq 0, & t \in (0, t_0) \\ w(x, 0) = \varphi_x^\varepsilon(x) - \varepsilon \geq 0, & x \in [0, L], \end{cases} \quad (2.19)$$

Notemos que podemos tomar  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, en términos del dato inicial, con el fin de asegurar (2.19)<sub>4</sub>.

Multipliquemos la ecuación (2.19)<sub>1</sub> por  $w_-$ , siendo  $w_- = \min\{w, 0\}$ , e integremos sobre  $(0, L) \times (0, t)$  para  $0 < t < t_0$ . Reagrupando términos de forma similar a la etapa anterior llegamos a

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L \frac{1}{2} b'(u^\varepsilon) (|\omega_-|^2)_\tau dx d\tau &= - \int_0^t \int_0^L a'(u_x^\varepsilon) |(\omega_-)_x|^2 dx d\tau \\ &- \int_0^t \int_0^L (a'(u_x^\varepsilon))_x \omega_x \omega_- dx d\tau + \int_0^t a'(u_x^\varepsilon(L, \tau)) \omega_x(L, \tau) \omega_-(L, \tau) d\tau \\ &+ \int_0^t \int_0^L a''(u_x^\varepsilon) u_{xx}^\varepsilon \omega_x \omega_- dx d\tau + \int_0^t \int_0^L \frac{1}{2} \left( \frac{b''(u^\varepsilon)}{b'(u^\varepsilon)} a'(u_x^\varepsilon) u_x^\varepsilon \right)_x |\omega_-|^2 dx d\tau \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

Estimemos las integrales anteriores por separado.

- Despreciamos  $I_1 \leq 0$ .
- $I_3$  se anula, ya que  $w(L, t) \geq 0$ .
- $I_2$  e  $I_4$  se cancelan.
- Considerando las propiedades que satisfacen las funciones  $a, b, g$  deducimos

$$I_5 \leq C \int_0^t \int_0^L |\omega_-|^2 dx d\tau.$$

- Por último, el miembro derecho podemos estimarlo de forma análoga a (2.18).

Con todo ello se obtiene

$$\int_0^L \omega_-(x, t) dx \leq K \int_0^t \int_0^L |\omega_-|^2 + \int_0^L \omega_-(x, 0) dx.$$

Aplicando Gronwall nuevamente tenemos

$$\int_0^L |\omega_-|^2(x, t) dx \leq e^{Kt} \left( \int_0^L \omega_-(x, 0) dx \right) = 0,$$

para cualquier  $t \in [0, t_0]$ , i.e.  $u_x^\varepsilon(x, t) \geq \varepsilon$ .

*Tercera etapa.* Finalicemos probando que las soluciones son positivas en  $[0, t_0]$ .

Por la segunda etapa sabemos que las soluciones son crecientes en  $[0, t_0]$ . Por tanto, en este intervalo se tiene  $\delta = \varphi(0)/2 \leq u(0, t) \leq u(x, t)$ , ya que en la etapa anterior probamos que  $u_x^\varepsilon(x, t) \geq \varepsilon$ .

□

**Lema 2.5** *Sea  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Entonces  $u^\varepsilon$ , la solución del problema (2.14), es también solución clásica de (2.11) en  $[0, \tau]$  para  $\tau$  independiente de  $\varepsilon$ . Más aún, se tiene*

$$u^\varepsilon \nearrow u \quad \text{uniformemente en } [0, L] \times [0, \tau],$$

donde  $u$  es solución débil del problema original (2.1).

**Demostración.** Por el Lema 2.4, únicamente falta probar que las funciones  $u_\varepsilon$  están acotadas uniformemente en  $\varepsilon$ .

Denotemos por  $\xi_\varepsilon(t) = \int_0^L (u^\varepsilon)^{m+1}(x, t) dx$ . En primer lugar vamos a acotar  $\xi_\varepsilon(t) \leq \mathcal{M}(t)$ , con  $\mathcal{M}(t)$  independiente de  $\varepsilon$ .

Multiplicando la ecuación (2.14)<sub>1</sub> del problema aproximado por  $u^\varepsilon$  e integrando por partes, no es difícil ver que  $\xi_\varepsilon(t)$  verifica la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{m}{m+1} \xi'_\varepsilon(t) + \varepsilon^{p-1} u^\varepsilon(0, t) + \int_0^L (u_x^\varepsilon)^p(t) dx = (u^\varepsilon)^{q+1}(L, t) \quad (2.20)$$

para cualquier  $t \in (0, \tau_\varepsilon)$ .

Si  $q = p - 1$ , por teoría de trazas se tiene

$$v^p(L, t) \leq C_1(\eta) \int_0^L |v|^p dx + \eta \int_0^L |v_x|^p dx; \quad (2.21)$$

y si  $p - 1 \geq m$ , se verifica

$$\int_0^L |v|^p dx \leq \eta \int_0^L (|v_x|^p + |v|^p) dx + C_2(\eta) \left( \int_0^L |v|^{m+1} dx \right)^{\frac{p}{m+1}}, \quad (2.22)$$

para todo  $\eta > 0$ , véase [LSU]. Supongamos ahora

$$q = p - 1 \geq m, \quad (2.23)$$

de forma que se verifiquen las dos estimaciones anteriores. Entonces (2.20) se lee ahora

$$\frac{m}{m+1} \xi'_\varepsilon(t) + \int_0^L (u_x^\varepsilon)^p(t) dx \leq (u^\varepsilon)^p(L, t) \quad (2.24)$$

Aplicamos ahora (2.21) para  $v = u^\varepsilon$  para estimar el miembro derecho de (2.24) con  $\eta = 1/2$  y seguidamente añadimos el término  $\frac{1}{2} \int_0^L |u^\varepsilon|^p dx$  a ambos lados. Esto da

$$\frac{m}{m+1} \xi'_\varepsilon(t) + \frac{1}{2} (\|u^\varepsilon\|_{W^{1,p}[0,L]})^p \leq C_1 \int_0^L (u^\varepsilon)^p dx.$$

Aplicando ahora (2.22) para  $\eta$  suficientemente pequeño se deduce

$$\xi'_\varepsilon(t) \leq C_2 \xi_\varepsilon^\rho(t), \quad \rho = \frac{p}{m+1} > 1 \quad (2.25)$$

para una constante positiva  $C_2$  independiente de  $\varepsilon$ , i.e.

$$\xi_\varepsilon(t) \leq \frac{\xi_\varepsilon(0)}{[1 - C(\rho - 1)\xi_\varepsilon^{\rho-1}(0)t]^{1/(\rho-1)}} \leq \mathcal{M}_1(t), \quad (2.26)$$

para  $t \in [0, T^*)$ ,  $T^* > 0$  y  $\mathcal{M}_1(t)$  independiente de  $\varepsilon$ .

A continuación deducimos una cota uniforme para  $u^\varepsilon$  de una acotación para  $\xi_\varepsilon$ .

Para ello introducimos la ecuación de la energía para el problema (2.14),

$$\begin{aligned} \frac{4m}{(m+1)^2} \int_0^t \int_0^L \left| \left( (u^\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}} \right)_t \right|^2 dx ds + H_\varepsilon(u^\varepsilon(t)) &= H_\varepsilon(\varphi^\varepsilon), \\ H_\varepsilon(v) &= \frac{1}{p} \int_0^L (v_x)^p(x) dx + \varepsilon^{p-1} v(0) - \frac{1}{q+1} v^{q+1}(L), \end{aligned} \quad (2.27)$$

para todo  $t \in [0, \tau_\varepsilon]$ . Si en dicha ecuación hacemos  $q = p - 1$  y despreciamos los términos positivos del miembro derecho, obtenemos

$$\int_0^L (v_x)^p(x) dx \leq p H_\varepsilon(\varphi^\varepsilon) + (u^\varepsilon)^p(L, t).$$

Estimando el término  $(u^\varepsilon)^p(L, t)$  como hicimos anteriormente en (2.24) obtenemos que

$$\int_0^L ((u_x^\varepsilon)^p(x, t) + (u^\varepsilon)^p(x, t)) dx \leq A + B(\xi_\varepsilon)^\rho(t) \leq A + B(\mathcal{M}_1)^\rho(t), \quad (2.28)$$



con constantes positivas  $A, B$  independientes de  $\varepsilon$  y  $t$ . Además, por (2.21) la acotación en la norma  $W^{1,p}$  implica la acotación uniforme de la solución, i.e.

$$\max_{0 \leq x \leq L} u^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(L, t) \leq \mathcal{M}(t), \quad (2.29)$$

para  $t \in [0, T^*)$  y para  $\mathcal{M}(t) = C(A + B(\mathcal{M}_1)^\rho(t))$ . Por la expresión de  $\mathcal{M}_1(t)$  en (2.26), se tiene que  $\mathcal{M}_1(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow T^*$ . Por tanto,  $\mathcal{M}(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow T^*$ , y podemos determinar  $\tau \in (0, T^*)$  como una solución de

$$\mathcal{M}(\tau) = M,$$

demostrando así acotación uniforme en  $\varepsilon$  para este caso.

Definamos a continuación el tiempo

$$T = \sup \{ \tau \in [0, \infty) : \{u^\varepsilon\} \text{ está uniformemente acotada con respecto a } \varepsilon \\ \text{ en } [0, L] \times [0, \tau] \}.$$

Sabemos ya que  $T > 0$ . Fijemos cierto tiempo  $\tau$  tal que  $0 < \tau < T$ . Entonces  $u^\varepsilon$  es la solución clásica del problema (2.11) para cualquier  $0 < \varepsilon \ll 1$  en  $[0, \tau]$ . Observemos que

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \text{ implica } u^{\varepsilon_1}(x, t) \geq u^{\varepsilon_2}(x, t) \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, \tau], \quad (2.30)$$

como consecuencia del hecho de que  $u^{\varepsilon_2}$  es una subsolución del problema uniformemente parabólico (2.14) para  $\varepsilon = \varepsilon_1$ .

Si  $\tau \in [0, T)$  entonces debido a (2.30), a que  $u^\varepsilon(L, t) \leq \mathcal{M}(t)$  y a la ecuación de la energía (2.27), tenemos que  $u^\varepsilon$  converge en norma apropiada a una solución débil  $u$  del problema (2.1). Debido a los resultados de DiBenedetto [D], Teorema 1.3 Capítulo III si  $p \geq 2$  y Teorema 1.3 Capítulo VI si  $p < 2$ ,  $u$  es continua y, en consecuencia,  $u^\varepsilon$  converge uniformemente a  $u$  en cualquier compacto incluido en  $[0, L] \times [0, T)$ .

Supongamos que  $p, q, m$  no verifican (2.23). Sean  $\tilde{p}, \tilde{q}$  y  $\tilde{m}$  verificando (2.23), esto es,  $\tilde{q} = \tilde{p} - 1 \geq \tilde{m}$ .

Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} \tilde{b}'(\tilde{u})\tilde{u}_t = \tilde{a}'(\tilde{u}_x)\tilde{u}_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, t_0), \\ \tilde{u}_x(0, t) = 0, & t \in (0, t_0), \\ \tilde{a}(\tilde{u}_x(L, t)) = \tilde{g}(\tilde{u}(L, t)), & t \in (0, t_0), \\ \tilde{u}(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, L], \end{cases} \quad (2.31)$$

siendo

$$\begin{aligned}\tilde{a}(z) &= \begin{cases} z^{p-1}, & \text{si } z < 2M^{\frac{q}{p-1}}, \\ z^{\tilde{p}-1} & \text{si } z > 3M^{\frac{q}{p-1}}, \end{cases} \\ \tilde{b}(v) &= \begin{cases} v^m, & \text{si } v < 2M, \\ v^{\tilde{m}} & \text{si } v > 3M, \end{cases} \\ \tilde{g}(v) &= \begin{cases} v^q, & \text{si } v < 2M, \\ v^{\tilde{q}} & \text{si } v > 3M, \end{cases}\end{aligned}$$

siendo  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Por las consideraciones anteriores tenemos que las soluciones de este problema,  $\tilde{u}$  son continuas y verifican  $\tilde{u}(t) \leq \mathcal{M}(t)$ , para todo  $t \in [0, \tau]$ . Pero entonces, se tiene que  $\tilde{u}(x, t)$  es solución del problema original (2.1) con  $p, q$  y  $m$ , para todo  $t \in [0, \tau]$ .  $\square$

3. Continuamos la prueba del Teorema 2.1. Nótese que la monotonía de  $u$  en  $x$  y  $t$  se deduce de la monotonía de  $u^\varepsilon$ , dada en (2.15) del Lema 2.4. Así pues, para concluir la prueba resta probar (2.5), esto es, que si el tiempo maximal de existencia  $T$  es finito, entonces

$$\max_{0 \leq x \leq L} u(x, t) = u(L, t) \longrightarrow +\infty \quad \text{cuando } t \rightarrow T.$$

Sea  $T < \infty$  y supongamos que  $u(L, t) \leq K$  para  $t \in [0, T)$ , y alguna constante  $K$  positiva. La desigualdad (2.30) da entonces la acotación de  $\{u^\varepsilon\}$  en  $[0, L] \times [0, T]$  y razonando de forma análoga a la deducción de la cota uniforme para  $u^\varepsilon$  dada anteriormente en (2.29), obtenemos

$$\max_{0 \leq x \leq L} u^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(L, t) \leq 2K \quad \text{for } t \in [T, T + \eta]$$

para algún  $\eta$  positivo, lo cual contradice la definición de  $T$ . Entonces  $u(L, t)$  no puede estar acotada, cumpliéndose (2.5), lo que da fin a la prueba.  $\square$

El siguiente resultado es ahora consecuencia directa de las propiedades de crecimiento y convexidad de las soluciones.

**Lema 2.6** *Para cada  $t \in [0, T)$  fijo se tiene la siguiente estimación*

$$u(L, t) \left[ 1 - (L - x)u^{\frac{q-p+1}{p-1}}(L, t) \right] \leq u(x, t) \leq u(L, t), \quad (2.32)$$

*que se cumple para todo  $0 \leq x \leq L$ .*

**Demostracion.** Sea  $0 < t_0 < T$  dado. Por la proposición anterior sabemos que  $u^\varepsilon \nearrow u$  uniformemente en  $[0, L] \times [0, t_0]$ , donde  $u^\varepsilon$  son soluciones clásicas del problema regularizado (2.11), cuyas derivadas verifican  $u_x^\varepsilon, u_{xx}^\varepsilon \geq 0$ . En consecuencia, aplicando el teorema del Valor Medio, conseguimos

$$u^\varepsilon(L, t) - u^\varepsilon(x, t) \leq (L - x)u_x^\varepsilon(L, t) \leq (L - x)(u^\varepsilon)^{\frac{q}{p-1}}(L, t). \quad (2.33)$$

Haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , por la convergencia uniforme, se cumple (2.32).  $\square$

### 2.3 Explosión regional

En esta Sección estudiamos el problema (2.1) para el caso  $0 < m < q = p - 1$ , que se reduce a

$$\begin{cases} (u^m)_t = (|u_x|^{p-2}u_x)_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = u(L, t), & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (2.34)$$

Probaremos el Teorema 2.2 referente a la explosión regional. La demostración de este teorema es extensa y a ella dedicaremos esta parte del capítulo. La llevaremos a cabo en varias etapas.

Un primer paso será estudiar la tasa de explosión para este caso. Lo haremos mediante un argumento de masas.

**Proposición 2.7** *Sea  $0 < m < q = p - 1$  y  $u$  una solución débil del problema (2.1). Entonces,*

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \sim (T - t)^{\frac{-1}{p-1-m}}, \quad (2.35)$$

cuando  $t$  se aproxima a  $T$ ,

**Demostracion.**

Comenzamos probando la estimación superior. Para ello, fijemos  $x_0 = L - 1 + c$ , para algún  $c > 0$ . Nótese que la estimación (2.32) obtenida en el Lema 2.6, para todo  $x > x_0$  se expresa ahora

$$cu^\varepsilon(L, t) \leq u^\varepsilon(x, t) \leq u^\varepsilon(L, t). \quad (2.36)$$

Si denotamos por

$$y_\varepsilon(t) = \frac{1}{L} \int_0^L (u^\varepsilon)^m(x, t) dx,$$

elevando a la potencia  $m$  la desigualdad (2.36) e integrando en  $[0, L]$ , fácilmente se sigue

$$u_\varepsilon(L, t) \geq y_\varepsilon(t)^{\frac{1}{m}} \geq cu^\varepsilon(L, t). \quad (2.37)$$

De aquí concluimos

$$y_\varepsilon(t) \sim (u^\varepsilon)^m(L, t). \quad (2.38)$$

Por otra parte, utilizando la ecuación del problema regularizado (2.11) se deduce la siguiente identidad

$$Ly'_\varepsilon(t) = \int_0^L (u^m)_t dx = \int_0^L ((u_\varepsilon)_x)^{p-1} dx = (u^\varepsilon)^{p-1}(L, t) - \varepsilon^{p-1},$$

que unida a la primera desigualdad de (2.37) da

$$1 \leq y_\varepsilon^{\frac{-(p-1)}{m}}(t) (Ly'_\varepsilon(t) + \varepsilon^{p-1}). \quad (2.39)$$

Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, (2.39) implica que  $y^\varepsilon$  explota en cierto tiempo finito  $T$ , y por consiguiente, teniendo en cuenta (2.38), tenemos que

$$(u^\varepsilon)^m(L, t) \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } t \rightarrow T. \quad (2.40)$$

Además, si integramos ahora (2.39) sobre  $(t, s)$  llegamos a

$$s - t \leq \frac{Lm}{p-1-m} \left[ (y^\varepsilon(t))^{\frac{-(p-1-m)}{m}} - (y^\varepsilon(s))^{\frac{-(p-1-m)}{m}} \right].$$

Ya que sabemos que  $y^\varepsilon$  se hace infinita en  $T$ , para  $s$  suficientemente próximo a  $T$  la expresión anterior da

$$c(T - t) \leq (u^\varepsilon)^{-(p-1-m)}(t),$$

lo que tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$  nos da la desigualdad superior de la tasa (2.35).

A continuación, para demostrar la cota inferior de (2.35), escribimos la estimación análoga a (2.36),

$$(1 - \lambda)u^\varepsilon(L, t) \leq u^\varepsilon(x, t) \leq u^\varepsilon(L, t), \quad (2.41)$$

para todo  $x \in [L - \lambda, L]$  con  $\lambda \ll 1$ .

Para estos puntos consideremos la función

$$z_{\lambda,\varepsilon}(t) = \frac{1}{\lambda} \int_{L-\lambda}^L (u^\varepsilon)^m(x, t) dx,$$

y procederemos como anteriormente. En primer lugar, elevamos a la potencia  $m$  la expresión previa y la integramos en  $[L - \lambda, L]$  para obtener

$$u^\varepsilon(L, t) \leq \frac{1}{1-\lambda} z_{\lambda,\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(t) \leq \frac{1}{1-\lambda} u^\varepsilon(L, t). \quad (2.42)$$

De aquí se obtiene que

$$z_{\lambda,\varepsilon}(t) \sim (u^\varepsilon)^m(L, t) \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } t \rightarrow T, \quad (2.43)$$

donde hemos utilizado además (2.40).

Por otro lado, si derivamos  $z_{\lambda,\varepsilon}$  con respecto a  $t$ , teniendo en cuenta la ecuación (2.11)<sub>1</sub> y la condición de contorno del problema aproximado (2.11), se tiene

$$\lambda z'_{\lambda,\varepsilon}(t) = \int_{L-\lambda}^L \left( (u^\varepsilon)^m \right)_t dx = \int_{L-\lambda}^L \left( (u^\varepsilon_x)^{p-1} \right)_x dx \leq (u^\varepsilon)^{p-1}(L, t). \quad (2.44)$$

La primera desigualdad de (2.42) añadida a (2.44) da

$$\lambda z'_{\lambda,\varepsilon}(t) \leq \left( \frac{1}{1-\lambda} z_{\lambda,\varepsilon}^{\frac{1}{m}}(t) \right)^{p-1},$$

esto es,

$$z_{\lambda,\varepsilon}^{-\frac{p-1}{m}}(t) z'_{\lambda,\varepsilon}(t) \leq \frac{1}{\lambda(1-\lambda)^{p-1}} = C(\lambda).$$

Integrando sobre  $(t, s)$  con  $0 < t < s < T$  nos da

$$z_{\lambda,\varepsilon}^{\frac{-(p-1-m)}{m}}(t) - z_{\lambda,\varepsilon}^{\frac{-(p-1-m)}{m}}(s) \leq C(s-t).$$

Por (2.43) no sólo sabemos que  $z_{\lambda,\varepsilon}^{\frac{-(p-1-m)}{m}}(s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow T$ , sino que además la expresión anterior se escribe

$$(u^\varepsilon)^{-(p-1-m)}(L, t) \leq C(T-t),$$

lo cual, tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , completa la demostración de la tasa.

□

Seguidamente, rescalamos las soluciones de acuerdo con la tasa de explosión dada en (2.35):

$$v(x, \tau) = (Te^{-\tau})^{\frac{1}{p-1-m}} u(x, T(1 - e^{-\tau})), \quad \tau = -\ln\left(\frac{T-t}{T}\right). \quad (2.45)$$

Si denotamos

$$\beta = \frac{m}{p-1-m},$$

se tiene que la función  $v(x, \tau)$  satisface

$$\begin{cases} (v^m)_\tau = ((v_x)^{p-1})_x - \beta v^m, & (x, \tau) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ v_x(0, \tau) = 0, \quad v_x(L, \tau) = v(L, \tau), & \tau \in (0, \infty), \\ v(x, 0) = v_0(x) = T^{\frac{1}{p-1-m}} \varphi(x), & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (2.46)$$

Observemos que, debido a (2.35), existen constantes positivas  $c, C$  tales que

$$c \leq v(L, \tau) \leq C \quad (2.47)$$

para cualquier  $\tau \in [0, \infty)$ . Ahora bien, la convexidad de  $v$  implica que su derivada espacial alcanza su máximo valor en el punto  $x = L$ . De este hecho, de la condición de contorno y de la estimación anterior, se deduce

$$c \leq \max_{x \in [0, L]} v_x(x, \tau) \leq C. \quad (2.48)$$

De estas estimaciones se deduce que  $v \in W^{1,p}(0, L) \subset C^{\frac{p-1}{p}}([0, L])$ . Por tanto,  $v \in L^\infty(0, \infty : C^{\frac{p-1}{p}}([0, L]))$ . Así pues, existe una subsucesión, que seguiremos denotando por  $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\tau_n \rightarrow \infty$ , y una función  $\varpi(x, \tau) \in L^\infty(0, \infty : W^{1,p}(0, L))$  tales que

$$\left. \begin{aligned} v(\cdot, \tau + \tau_n) &\longrightarrow \varpi(\cdot, \tau) \quad \text{en } C([0, L]) \\ v(\cdot, \tau + \tau_n) &\rightharpoonup \varpi(\cdot, \tau) \quad \text{débilmente en } W^{1,p}(0, L) \end{aligned} \right\} \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.49)$$

Es decir, hemos probado la compacidad de la órbita de una solución del problema (2.46), como enunciamos a continuación.

**Lema 2.8** *La órbita  $\{v(x, \tau), \tau > \tau_0\}$  de una solución del problema (2.46) es compacta en el siguiente sentido: para cada sucesión  $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\tau_n \rightarrow \infty$ , la familia  $v(x, \tau + \tau_n)$  es compacta en  $L^\infty(0, \infty : C[0, L])$ .*

Nuestra próxima tarea consiste en probar que  $\varpi$  es la única solución no trivial del correspondiente problema estacionario.

$$\begin{cases} ((\omega_x)^{p-1})_x = \beta\omega^m, & x \in (0, L), \\ \omega_x(0) = 0, \quad \omega_x(L) = \omega(L). \end{cases} \quad (2.50)$$

Lo llevaremos a cabo en varios pasos.

1. En primer lugar, disparando desde diferentes valores iniciales  $\omega(0) = \omega_0$ , estudiaremos dichos perfiles.

**Teorema 2.9**

(i) Existe una solución estrictamente positiva de (2.50) si y solamente si

$$L < L^*, \quad L^* = \frac{p}{p-1-m}.$$

La solución estrictamente positiva es única para cada  $L \in (0, L^*)$ .

(ii) Si  $L \geq L^*$ , entonces existe una única solución dada por

$$\omega(x) = \left( \mu \left[ 1 - \frac{1}{L^*}(L-x) \right]_+^p \right)^{\frac{1}{p-1-m}}, \quad (2.51)$$

$$\mu = \frac{mp}{(m+1)(p-1)(p-1-m)}.$$

**Observación 2.1** Nótese que  $\omega \equiv 0$  en  $[0, L - L^*]$  y  $\omega > 0$  en  $(L - L^*, L]$  en (ii).

**Demostracion.** Consideremos la E.D.O.

$$((\omega_x)^{p-1})_x = \beta\omega^m \quad x \in (0, L), \quad (2.52)$$

con condiciones iniciales

$$\omega(0) = \omega_0 > 0, \quad \omega_x(0) = 0. \quad (2.53)$$

Buscamos valores de  $\ell$  en términos de  $\omega_0$  verificando

$$\omega_x(\ell) = \omega(\ell). \quad (2.54)$$

Nos proponemos, para  $\omega_0 > 0$  dado, encontrar  $\ell > 0$  para el cual (2.54) se cumpla.

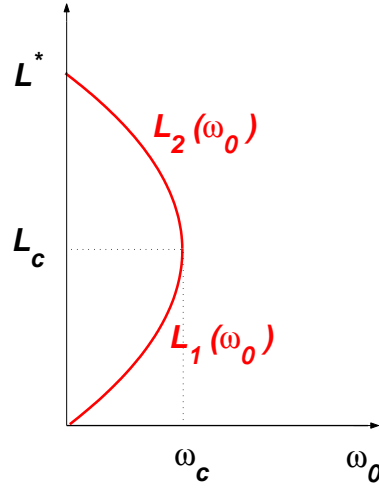


FIGURA 2.

Multiplicando (2.50)<sub>1</sub> por  $\omega_x$  e integrando obtenemos

$$\omega_x = \left( \mu(\omega^{m+1} - \omega_0^{m+1}) \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde  $\mu$  viene dado en (2.51). Por lo tanto, resolver el problema (2.52)-(2.54) es equivalente a encontrar  $\ell$  de tal modo que se cumplan las dos identidades siguientes,

$$\int_{\omega_0}^{\omega(\ell)} (\omega^{m+1} - \omega_0^{m+1})^{\frac{-1}{p}} d\omega = \mu^{\frac{1}{p}} \ell \quad (2.55)$$

y

$$\omega(\ell) = \left( \mu(\omega^{m+1}(\ell) - \omega_0^{m+1}) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.56)$$

Basándonos en las ideas de [ChFQ] (véase también [FGR1]), consideramos el problema estacionario (2.50) en la forma (2.55)-(2.56). Definimos la función

$$P(z) = \mu^{-1} z^p - z^{m+1} + \omega_0^{m+1}.$$

Nótese que por (2.56),  $\omega(\ell)$  debe ser una raíz de  $P$  y que  $P'(z)$  se anula únicamente para

$$z_0 = \left( \frac{m}{(p-1)(p-1-m)} \right)^{\frac{1}{p-1-m}}.$$

A fin de asegurar que  $P$  tiene al menos una raíz debemos asumir que  $P(z_0) \leq 0$ . Este hecho implica la siguiente restricción de los posibles valores para el dato inicial



$\omega_0 \leq \omega_o^c = z_0 \left( \frac{p-1-m}{p} \right)^{\frac{1}{m+1}}$ . Denotemos las dos raíces de  $P$  por  $R_1(\omega_0) \leq R_2(\omega_0)$ . Como se tiene que  $P(\omega_0) > 0$  y  $P(z_0) \leq 0$  entonces  $\omega_0 \leq R_1(\omega_0) \leq R_2(\omega_0)$ . La relación entre  $R_1(\omega_0)$ ,  $R_2(\omega_0)$  y las correspondientes soluciones del problema (2.52)-(2.54) están dadas por (2.55), i.e.

$$\ell_i(\omega_0) = \mu^{\frac{-1}{p}} \omega_0^{\frac{p-1-m}{p}} \rho(\gamma_i(\omega_0)) , \quad (2.57)$$

donde

$$\rho(z) = \int_1^z (\omega^{m+1} - 1)^{\frac{-1}{p}} d\omega, \quad \gamma_i(\omega_0) = \frac{R_i(\omega_0)}{\omega_0}. \quad (2.58)$$

Observamos que  $\ell_1(\omega_0) \leq \ell_2(\omega_0)$ , y  $\ell_1(\omega_0) = \ell_2(\omega_0) = \ell_c$  si y solamente si  $\omega_0 = \omega_o^c$ . A continuación probamos que  $\ell_1$  es creciente en  $\omega_0$  y  $\ell_1(0) = 0$ . Es decir, vemos que  $\ell_1(\omega_0)$  corresponde a los valores de  $\ell$  hasta  $\ell_c$  en la Figura 2, para  $0 \leq \omega_0 \leq \omega_o^c$ . Para demostrar que  $\ell'_1(\omega_0) > 0$  si  $\omega_0 \in (0, \omega_o^c)$ , es suficiente ver que  $\gamma'_1(\omega_0) > 0$ . Derivando  $P(R_1(\omega_0)) = 0$  con respecto a  $\omega_0$  llegamos a

$$R'_1(\omega_0) = \frac{(m+1)\omega_0^m}{(m+1)(R_1(\omega_0))^m - p\mu^{-1}(R_1(\omega_0))^{p-1}} = -\frac{(m+1)\omega_0^m}{P'(R_1(\omega_0))}.$$

Además,

$$\gamma'_1(\omega_0) = \frac{R'_1(\omega_0)\omega_0 - R_1(\omega_0)}{\omega_0^2} = \frac{-(p-1-m)R_1^p(\omega_0)}{\mu\omega_0^2 P'(R_1(\omega_0))} > 0.$$

Si tomamos límite en (2.55) cuando  $\omega_0 \rightarrow 0$ , como  $R_1(\omega_0) \rightarrow 0$ , vemos que  $\ell_1(0) = 0$ . Para concluir la prueba de (i) probamos que  $\ell_2$  es decreciente en  $\omega_0$  y  $\ell_2(0) = L^*$ , como se representa para  $\ell \geq \ell_c$  en la Figura 2. Tenemos

$$\ell'_2(\omega_0) = \frac{p-1-m}{p} \left( \mu\omega_0^{m+1} \right)^{\frac{-1}{p}} \Phi(\omega_0),$$

donde

$$\Phi(\omega_0) = \rho(\gamma_2(\omega_0)) + \gamma_2(\omega_0)(\gamma_2^{m+1}(\omega_0) - 1)^{\frac{-1}{p}} \left( \frac{m}{(p-1)(p-1-m)} R_2^{m-p+1}(\omega_0) - 1 \right)^{-1}$$

y  $\gamma_2$  y  $\rho$  dados en (2.58). No presenta dificultad probar que  $\Phi(\omega_0)$  es negativa para todo  $0 < \omega_0 \leq \omega_o^c$ . Tenemos  $\Phi(0) = 0$  y mediante un sencillo cálculo, utilizando que  $P(R_2(\omega_0)) = 0$ , deducimos que

$$\Phi'(\omega_0) = \frac{\frac{m}{p-1} R_2^{m-p}(\omega_0) R'_2(\omega_0)}{\left( \frac{m}{(p-1)(p-1-m)} R_2^{m+1-p}(\omega_0) - 1 \right)^2} \leq 0.$$

Substituyendo  $\omega(\ell)$  por  $R_2(0) = \mu^{\frac{1}{p-1-m}}$  en (2.55), llegamos a

$$\ell_2(0) = \frac{p}{p-1-m} = L^*.$$

Así pues, el resultado previo nos dice que si  $L \geq L^*$  las soluciones de (2.50) deben anularse en  $x = 0$ . La única solución no trivial verificando  $\omega_0(0) = 0$  es la solución explícita dada en (2.51).  $\square$

**2.** A continuación vemos que el límite  $\varpi$  dado por (2.49) no depende del tiempo. Para ello, mediante la construcción de un funcional de Lyapunov para el problema (2.46), probamos el siguiente resultado:

**Lema 2.10** *Sea  $v$  la correspondiente solución débil de (2.46). Entonces  $v$  satisface*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^L \left| \left( v^{\frac{m+1}{2}} \right)_\tau \right|^2 dx d\tau \leq \mathcal{L}, \quad (2.59)$$

para todo  $\tau_1, \tau_2 \in [0, \infty)$ .

**Demostración.** Definimos el siguiente funcional

$$L_v(\tau) = \frac{1}{p} \int_0^L |v_x|^p dx + \frac{\beta}{m+1} \int_0^L v^{m+1} dx - \frac{1}{p} v^p(L),$$

el cual no es difícil probar que es no creciente sobre las órbitas, ya que

$$\frac{d}{d\tau} L_v(\tau) = -\frac{4m}{(m+1)^2} \int_0^L \left| \left( v^{\frac{m+1}{2}} \right)_\tau \right|^2 dx \leq 0. \quad (2.60)$$

De aquí se deduce que  $L_v(\tau_1) \leq L_v(0) \leq K$ , para todo  $\tau_1 \geq 0$ .

Además, por su propia definición, se tiene que  $L_v(\tau) \geq -\frac{1}{p} C^p$ , para  $C > 0$  dada por (2.47).

Para concluir, notemos que integrando (2.60), se obtiene

$$\frac{4m}{(m+1)^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^L \left| \left( v^{\frac{m+1}{2}} \right)_\tau \right|^2 dx ds = L_v(\tau_1) - L_v(\tau_2) \leq \tilde{\mathcal{L}}, \quad (2.61)$$

para todo  $\tau_1, \tau_2 \in [0, \infty)$ , con  $\tilde{\mathcal{L}}$  independiente de  $\tau$ .

$\square$

**Lema 2.11** Sea  $V_n(x, \tau) = v(x, \tau_n + \tau)$ ,  $x \in [0, L]$ , donde  $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$  está dado por (2.49). Entonces, cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene el límite

$$\begin{cases} V_n \longrightarrow \varpi & \text{in } L^\infty([0, \tau] : L^{m+1}(0, L)) \text{ si } m < 1, \\ V_n^{\frac{m+1}{2}} \longrightarrow \varpi^{\frac{m+1}{2}} & \text{in } L^\infty([0, \tau] : L^2(0, L)) \text{ si } m \geq 1, \end{cases}$$

para todo  $\tau > 0$ .

**Demostracion.** En efecto, expresando  $v_\tau = \frac{2}{m+1} v^{\frac{1-m}{2}} \left( v^{\frac{m+1}{2}} \right)_\tau$  y aplicando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^L |V_n(x, \tau) - v(x, \tau_n)|^{m+1} dx &= \int_0^L \left| \int_{\tau_n}^{\tau_n+\tau} v_s(x, s) ds \right|^{m+1} dx \\ &\leq C \left[ \int_0^L \left( \int_{\tau_n}^{\tau_n+\tau} \left| (v^{\frac{m+1}{2}})_s \right|^2 ds \right)^{m+1} dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^L \left( \int_{\tau_n}^{\tau_n+\tau} v^{1-m} ds \right)^{m+1} dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left[ \int_0^L \left( \int_{\tau_n}^{\tau_n+\tau} \left| (v^{\frac{m+1}{2}})_s \right|^2 ds \right)^{m+1} dx \right]^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , debido a la estimación uniforme de  $v$  dada en (2.47) y (2.59). De forma similar,

$$\int_0^L \left| V_n^{\frac{m+1}{2}}(x, \tau) - v^{\frac{m+1}{2}}(x, \tau_n) \right|^2 dx \leq C \int_0^L \int_{\tau_n}^{\tau_n+\tau} \left| (v^{\frac{m+1}{2}})_s \right|^2 ds dx \longrightarrow 0$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . □

**3.** Más aún, veamos que  $\varpi$  es una solución del problema estacionario (2.50), utilizando algunas de las ideas de [LP].

**Lema 2.12** El límite  $\varpi$  dado por (2.49) es solución del problema estacionario (2.50).

**Demostracion.**

Sea  $\theta \in C_0^2(\mathbb{R}^+)$ ,  $\theta \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^+} \theta(s) ds = 1$  y denotamos por

$$\zeta(x, \tau) = \theta(\tau - \tau_n) \varphi(x, \tau)$$

para  $\varphi$  suficientemente regular. De este modo  $\zeta$  es una función test admisible en la definición de solución débil con  $T = \tau_n + \tau$ . Tras realizar el cambio de variables

$s = \tau - \tau_n$ , y denotar por  $\Phi_n(x, s) = \varphi(x, \tau_n + s)$ , esta identidad en la definición se traduce en

$$\begin{aligned} & - \int_0^\tau \int_0^L \left( V_n^m (\Phi_n \theta)_s - ((V_n)_x)^{p-1} (\Phi_n)_x \theta - \beta V_n^m \Phi_n \theta \right) dx ds \\ & = \int_0^\tau (V_n)^{p-1}(L, s) \Phi_n(L, s) \theta(s) ds. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Eligiendo  $\Phi_n(x, s) = \xi(x)$  llegamos a

$$\begin{aligned} & - \int_0^\tau \int_0^L \left( V_n^m \theta' \xi - ((V_n)_x)^{p-1} \xi' \theta - \beta V_n^m \xi \theta \right) dx ds \\ & = \int_0^\tau (V_n)^{p-1}(L, s) \xi(L) \theta(s) ds. \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos

$$\begin{aligned} & - \int_0^\tau \theta'(s) ds \int_0^L \varpi^m(x) \xi(x) dx + \int_0^\tau \int_0^L (\sigma(x, s) \xi' - \beta \varpi^m \xi) \theta(s) dx ds \\ & = \int_0^\tau \varpi^{p-1}(L) \xi(L) \theta(s) ds, \end{aligned}$$

donde  $\sigma \in L^\infty([0, \tau] : L^{\frac{p}{p-1}}(0, L))$  es límite débil de  $((V_n)_x)^{p-1}$ . Obsérvese que la existencia de dicho límite nos la asegura la estimación uniforme para la derivada de  $v$ , esta es, (2.48).

Como  $\int_0^\tau \theta'(s) ds = 0$ , para  $\tau$  suficientemente grande, el primer término del miembro izquierdo de la igualdad anterior se anula, quedando

$$\int_0^\tau \left( \int_0^L \sigma(x, s) \xi'(x) dx \right) \theta(s) ds = \int_0^\tau \beta \varpi^m(x) \xi(x) dx + \varpi^{p-1}(L) \xi(L) \quad (2.63)$$

para cualquier  $\theta$  como antes y cualquier  $\xi \in W^{1,p}(0, L)$ .

La arbitrariedad de  $\theta$  nos permite concluir que  $\int_0^L \sigma(x, s) \xi'(x) dx$  no depende de  $s$ . Ahora la arbitrariedad de  $\xi$  indica que  $\sigma$  no depende de  $s$  y (2.63) se traduce por tanto en

$$\int_0^L \sigma(x) \xi'(x) dx = \int_0^L \beta \varpi^m(x) \xi(x) dx + \varpi^{p-1}(L) \xi(L) \quad (2.64)$$

para cualquier  $\xi \in W^{1,p}(0, L)$ .

Seguidamente, tomamos  $\Phi = V_n$  en (2.62) y ésta se convierte en

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^L ((V_n)_x)^p(x, s) \theta(s) dx ds = \\ & \frac{m}{m+1} \int_0^\tau \int_0^L V_n^{m+1}(x, s) \theta'(s) dx ds + \int_0^\tau \left( \int_0^L \beta V_n^{m+1} dx + V_n^p(L, s) \right) \theta(s) ds. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Como el primer término del miembro derecho de (2.65) tiende a cero cuando  $n$  tienda a  $\infty$ , se tiene

$$\int_0^L ((V_n)_x)^p(x, s) dx \rightharpoonup \int_0^L \beta \varpi^{m+1}(x) dx + \varpi^p(L)$$

débilmente en  $L^1(0, \tau)$ . En consecuencia, debido a (2.64) para  $\xi = \varpi$ , concluimos que

$$\int_0^L ((V_n)_x)^p(x, s) dx \rightharpoonup \int_0^L \sigma(x) \varpi_x dx \quad (2.66)$$

débilmente en  $L^1(0, \tau)$ . Falta probar que  $\sigma$  es igual a  $(\varpi_x)^{p-1}$ , para lo que aplicaremos la *técnica de Minty*. Nótese que la desigualdad

$$0 \leq \int_{-1}^1 \int_0^L \left[ \left( ((V_n)_x)^{p-1} - |W_x|^{p-2} W_x \right) \left( (V_n)_x - W_x \right) \right] \theta(s) dx ds$$

se cumple para cualquier  $W \in W^{1,p}(0, L)$  y  $\theta$  como antes. Ahora, tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  y usando (2.66) llegamos a

$$0 \leq \int_0^L \left( \sigma(x) - |W_x|^{p-2} W_x \right) (\varpi_x - W_x) dx.$$

Substituyendo  $W_x = \varpi_x + \lambda \vartheta_x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\vartheta$  arbitraria en la expresión anterior y multiplicándola por  $\lambda^{-1}$  encontramos que

$$\int_0^L \left( \sigma - |\varpi_x + \lambda \vartheta_x|^{p-2} (\varpi_x + \lambda \vartheta_x) \right) \vartheta_x dx$$

es no positiva (resp. no negativa) para todo  $\lambda > 0$  (resp.  $\lambda < 0$ ). Luego tomando  $\lambda \rightarrow 0$

$$\int_0^L \left( \sigma - (\varpi_x)^{p-1} \right) \vartheta_x dx = 0$$

para todo  $\vartheta$ , lo cual nos da la identidad  $\sigma = (\varpi_x)^{p-1}$ . Además la identidad (2.64) para  $\sigma = (\varpi_x)^{p-1}$  nos permite concluir que  $\varpi$  es una solución de (2.50).  $\square$

Acabamos de probar que

$$v(\cdot, \tau) \longrightarrow \varpi \quad \text{cuando } \tau \rightarrow \infty \quad \text{en } C([0, L]) ,$$

donde  $\varpi$  es una solución estacionaria no negativa de (2.46). Hasta el momento sabemos que para  $L > 0$  existen dos soluciones de (2.50), la solución trivial  $\varpi \equiv 0$  y la única solución no trivial  $\varpi = \omega$  dada por el Teorema 2.9. Pero  $v$  no puede tender a una función idénticamente cero debido a (2.47).

Como consecuencia de la unicidad de  $\omega$ , la solución no trivial de (2.50), concluimos que

$$v(\cdot, \tau) \longrightarrow \omega \quad \text{cuando } \tau \rightarrow \infty \quad \text{en } C([0, L]) . \quad (2.67)$$

Recordemos que (2.67) significa

$$\lim_{t \rightarrow T} (T - t)^{\frac{1}{p-1-m}} u(x, t) = \omega(x) \quad (2.68)$$

uniformemente en  $x \in [0, L]$ .

La igualdad (2.68) implica que

$$\text{supp}(\omega) \subset B(U).$$

Si  $L < L^*$  y, por consiguiente,  $\omega > 0$  en  $[0, L]$ , se tiene que  $B(U) = [0, L]$ .

Sin embargo, para  $L \leq L^*$ , por lo que hemos probado hasta el momento, únicamente podemos concluir que  $[L - L^*, L] \subset B(U)$ , y que  $v(x, \tau) \rightarrow 0$ , para todo  $x \in [0, L - L^*]$ . Pero pudiera suceder que  $u$  se hiciera infinita también en esos puntos con una tasa menor que la considerada en (2.68). En la siguiente etapa veremos que esto no sucede y que, efectivamente,  $B(U) = [L - L^*, L]$ .

**4.** Por último, demostramos que fuera del intervalo  $[L - L^*, L]$  las soluciones se mantienen acotadas. Para llevar a cabo esta prueba seguimos las ideas de [CEV]. Notemos en primer lugar que

$$\omega(x) = 0 \quad \forall x \in [0, L - L^*]$$

y por lo tanto, debido a (2.67) para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon)$  tal que

$$v(x, \tau) < \varepsilon \quad \forall (x, \tau) \in [0, L - L^*] \times [\tau_0, \infty) .$$

A continuación probaremos que en cualquier intervalo donde  $v$  decaiga a cero, lo hace exponencialmente como  $e^{\frac{-\tau}{m-1}}$ . Este hecho, junto con la definición (2.45), implica que  $u$  se mantiene acotada en dicho intervalo.

Para ello, en primer lugar demostramos que  $v(x, \tau_0 + \tau)$  es una subsolución débil del problema

$$\left. \begin{aligned} (g^m)_\tau &= (|g_x|^{p-2}g_x)_x - \beta g^m & (x, \tau) &\in [a - \delta, b + \delta] \times (0, \infty), \\ g(a - \delta, \tau) &= g(b + \delta, \tau) = \varepsilon & \tau &\in (0, \infty), \\ g(x, 0) &= \varepsilon & x &\in [0, L], \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

para cualquier intervalo  $[a - \delta, b + \delta] \subset [0, L - L^*]$ . Para la existencia de la solución de (2.69) véase [A].

**Definición 2.2** (a) Se dice que  $\gamma$  es subsolución de (2.69) en  $(0, S)$  con dato inicial  $\gamma_0$ , si  $\gamma \in L^\infty(0, S : W^{1,p}(a - \delta, b + \delta))$  satisface

$$\gamma(a - \delta, \tau) \leq \varepsilon, \quad \gamma(b + \delta, \tau) \leq \varepsilon$$

para c.t.p.  $\tau \in (0, S)$  y se cumple la siguiente desigualdad diferencial en forma débil

$$\int_0^S \int_{a-\delta}^{b+\delta} \{(\gamma_0^m - \gamma^m)\zeta_\tau + (\gamma_x)^{p-1}\zeta_x - \beta\gamma\zeta\} dx d\tau \leq 0$$

para todo  $\zeta \in L^1(0, T : W^{1,p}(a - \delta, b + \delta))$  no negativa con  $\zeta_\tau \in L^1((a - \delta, b + \delta) \times (0, S))$  y  $\zeta(S) = 0$ .

(b) Se dice que  $\gamma$  es supersolución de (2.69) con " $\leq$ " reemplazado por " $\geq$ ".

**Lema 2.13** Sea  $v$  la solución de nuestro problema rescalada según (2.45) y  $p$  la solución al problema (2.69). Entonces  $v(x, \tau) \leq g(x, \tau)$  para todo  $(x, \tau) \in [a - \delta, b + \delta] \times \mathbb{R}_0^+$ , donde  $[a - \delta, b + \delta] \subset [0, L - L^*]$  es arbitrario.

**Demostración.** Denotemos por  $sg_\theta^-$  y  $sg_0^-$  las siguientes funciones

$$sg_\theta^-(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x, \\ \frac{x}{\theta} & -\theta \leq x \leq 0, \\ -1 & x \leq -\theta, \end{cases} \quad sg_0^-(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Si restamos (2.46)<sub>1</sub> a (2.69)<sub>1</sub> multiplicamos por  $sg_\theta^-(g-v)$  e integramos en  $[a-\delta, b+\delta] \times [0, \tau_0]$ , para cualquier  $\tau_0 > 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau_0} \int_{a-\delta}^{b+\delta} (g^m - v^m)_\tau sg_\theta^-(g-v) dx d\tau + \beta \int_0^{\tau_0} \int_{a-\delta}^{b+\delta} (g^m - v^m) sg_\theta^-(g-v) dx d\tau \\ & + \int_0^{\tau_0} \int_{a-\delta}^{b+\delta} (|g_x|^{p-2} g_x - |v_x|^{p-2} v_x)(g_x - v_x)(sg_\theta^-)'(g-v) dx d\tau = 0, \end{aligned}$$

donde la tercera integral surge de realizar integración por partes. Nótese que el hecho de que en la frontera la diferencia entre  $v$  y  $g$  sea positiva implica que la función  $sg_\theta^-$  se anule y, por consiguiente la integral sobre el borde es cero. Obsérvese también que la segunda y tercera integral son positivas. Se obtiene por tanto

$$\int_0^{\tau_0} \int_{a-\delta}^{b+\delta} (g^m - v^m)_\tau sg_\theta^-(g-v) dx d\tau \leq 0$$

Tomando límite cuando  $\theta \rightarrow 0$  nos da

$$\int_0^{\tau_0} \int_{a-\delta}^{b+\delta} (g^m - v^m)_\tau sg_0^-(g^m - v^m) dx d\tau \leq 0,$$

donde usamos además que  $sg_0^-(g-v) = sg_0^-(g^m - v^m)$ . Esta última desigualdad puede expresarse

$$\int_{a-\delta}^{b+\delta} [g^m(\tau_0, x) - v^m(x)]^- dx \leq \int_{a-\delta}^{b+\delta} [g^m(0, x) - v^m(x)]^- dx \leq 0$$

con  $[x]^- = -\min(x, 0)$ . Luego  $g^m(\tau_0, x) \geq v^m(x)$  para cualquier  $\tau_0$  positivo y todo  $x \in [a-\delta, b+\delta]$  como queríamos demostrar.  $\square$

Como consecuencia del Lemma 2.13 se cumple

$$v(x, \tau_0 + \tau) \leq g(x, \tau) \quad \forall (x, \tau) \in [a-\delta, b+\delta] \times [0, \infty). \quad (2.70)$$

**Proposición 2.14** *Sea  $v$  solución de ((2.46)) tal que  $v(x, \tau) \rightarrow 0$  en  $[a-\delta, b+\delta] \times [0, \infty)$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que  $v(x, \tau) \leq Ce^{\frac{-\tau}{m-1}}$ .*

**Demostración.** Debido a (2.70) basta probar que la solución  $g$  de (2.69) tiende exponencialmente a la solución estacionaria del problema

$$\begin{cases} (|h_x|^{p-2} h_x)_x = \beta h^m, & x \in (a-\delta, b+\delta), \\ h(a-\delta) = h(b+\delta) = \varepsilon, \end{cases} \quad (2.71)$$



para el cual podemos construir una solución simétrica de forma explícita cuyo soporte queda contenido en  $X = [a - \delta, a - \frac{\delta}{2}] \cup [b + \frac{\delta}{2}, b + \delta]$  :

$$h(x) = \begin{cases} \Lambda \left( a - \frac{\delta}{2} - x \right)^{\frac{p}{p-1-m}} & x \in [a - \delta, a - \frac{\delta}{2}], \\ 0 & x \in (a - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2}), \\ \Lambda \left( x - b - \frac{\delta}{2} \right)^{\frac{p}{p-1-m}} & x \in [b + \frac{\delta}{2}, b + \delta], \end{cases}$$

con

$$\Lambda = \left[ \frac{m}{(p-1)(m+1)} \left( \frac{p-1-m}{p} \right)^{p-1} \right]^{\frac{1}{p-1-m}}$$

y para

$$\varepsilon = \Lambda \left( \frac{\delta}{2} \right)^{\frac{p}{p-1-m}}.$$

Restando (2.71) a (2.69) e integrando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a-\delta}^{b+\delta} (g^m - h^m) dx &= \int_{a-\delta}^{b+\delta} \left( (|g_x|^{r-1} g_x - |h_x|^{r-1} h_x)_x - \beta(g^m - h^m) \right) dx \\ &= (|g_x|^{r-1} g_x - |h_x|^{r-1} h_x)(b + \delta) - (|g_x|^{r-1} g_x - |h_x|^{r-1} h_x)(a - \delta) \\ &\quad - \beta \int_{a-\delta}^{b+\delta} (g^m - h^m) dx \leq -\beta \int_{a-\delta}^{b+\delta} (g^m - h^m) dx, \end{aligned}$$

ya que, por el principio de comparación demostrado en el Lema 2.13,  $g(x, \tau) \geq h(x)$  para todo  $x, \tau$  y despreciamos los términos negativos. Luego

$$\int_{a-\delta}^{b+\delta} (g^m - h^m) dx \leq C e^{-\beta \tau}. \quad (2.72)$$

De las propiedades de crecimiento y simetría que satisface  $g$  se deduce para cualquier  $y \in [a, b]$

$$g^m(y, \tau) \delta \leq \int_{a-\frac{\delta}{2}}^{b+\frac{\delta}{2}} g^m dx = \int_{a-\frac{\delta}{2}}^{b+\frac{\delta}{2}} (g^m - h^m) dx \leq \int_{a-\delta}^{b+\delta} (g^m - h^m) dx \leq C e^{-\beta \tau},$$

lo cual por (2.70) implica

$$v(x, t_0 + \tau) \leq C e^{\frac{-\tau}{p-1-m}}, \quad \forall (x, \tau) \in [0, L - L^*] \times [0, \infty).$$

□

De acuerdo al rescale (2.45), la estimación previa significa que  $u$  se mantiene acotada en  $[0, L - L^*]$  para todo  $t \leq T$ . Concluimos así que la explosión es regional para  $L > L^*$ .

## 2.4 Explosión global y explosión puntual

Finalizamos el análisis del problema (2.1) con la demostración del Teorema 2.3. Dividiremos dicha prueba en los dos casos, explosión global y explosión puntual, pues las técnicas que empleamos difieren en ambos. En realidad, el conjunto y la tasa de explosión para el rango  $0 < m < q < p - 1$  se pueden deducir de forma inmediata de los razonamientos anteriores. Trabajaremos un poco más para probar la explosión puntual y la tasa de explosión correspondiente.

**1. Caso  $0 < m < q < p - 1$ . Explosión global.** Como ya apuntamos con anterioridad, si  $0 < m < q < p - 1$  las soluciones explotan globalmente como consecuencia del Teorema del Valor Medio. Este hecho nos permitirá utilizar en el argumento de masas la misma función

$$y_\varepsilon(t) = \int_0^L (u^\varepsilon)^m dx,$$

para determinar ambas estimaciones de la tasa de explosión. Los cálculos son por lo tanto idénticos a los ya realizados en la Proposición 2.7, únicamente teniendo en cuenta que, para estos valores de los exponentes, la condición de contorno implica

$$Ly'_\varepsilon(t) = (u^\varepsilon)^q(L, t) - \varepsilon^{p-1}.$$

Sustituyendo el valor  $p - 1$  por  $q$ , todos los razonamientos son válidos, y nos dan la tasa de explosión en este caso.

**2. Caso:  $\max \{m, p - 1\} < q$ . Explosión puntual.** Comenzamos demostrando la tercera afirmación del Teorema 2.3, esto es, un resultado relativo a la tasa de explosión, cuya cota inferior nos permitirá describir la solución de forma más precisa cerca del punto  $x = L$  cuando  $t$  se aproxima a  $T$ .

1. Probamos la desigualdad inferior de la tasa siguiendo las ideas de [FrM]. Definamos la función

$$J(x, t) = u_x^\varepsilon(x, t) - \varsigma(x)(u^\varepsilon)^\sigma(x, t), \quad \sigma = \frac{q}{p-1} > 1, \quad (2.73)$$

donde  $\varsigma(x) \equiv \left( \frac{(x-\ell)_+}{L-\ell} \right)^n$ ,  $0 < \ell < L$  con  $\ell$  suficientemente próximo a  $L$  y  $n \geq \max\{2, \frac{1}{p-1}\}$ . Nótese que  $\varsigma$  verifica

$$\varsigma \varsigma'' - (2-p)(\varsigma')^2 \geq 0.$$

No es difícil sino algo tedioso demostrar que  $J$  verifica el siguiente problema parabólico,

$$\begin{cases} m(u^\varepsilon)^{m-1} J_t - \mathcal{L}^\varepsilon J = F^\varepsilon(x, t) & (x, t) \in (0, L) \times (0, t_0) \\ J(0, t) = \varepsilon, \quad J(L, t) = 0 & t \in (0, t_0) \\ J(x, 0) = (\varphi^\varepsilon)'(x) - \varsigma(x)(\varphi^\varepsilon)^\sigma(x) & x \in [0, L], \end{cases}$$

donde

$$\mathcal{L}^\varepsilon J = (p-1)(u_x^\varepsilon)^{p-2} J_{xx} - A^\varepsilon(x, t) J_x - B^\varepsilon(x, t) J,$$

$A^\varepsilon(x, t)$ ,  $B^\varepsilon(x, t)$  son funciones Hölder continuas y acotadas en  $[0, L] \times [0, \tau_\varepsilon]$  y

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(x, t) &= (p-1)u^{2\sigma}(u_x^\varepsilon)^{p-3} \{ \varsigma \varsigma'' - (2-p)(\varsigma')^2 \\ &\quad + (2q-m+1)\varsigma^2 \varsigma' (u^\varepsilon)^{\sigma-1} + \sigma(q-m)\varsigma^4 (u^\varepsilon)^{2(\sigma-1)} \}. \end{aligned}$$

Veamos que  $J(x, 0) \geq 0$  para  $x \in [0, L]$ , basándonos en las ideas de [ChF]. Haciendo uso del Teorema del Valor Medio como en el Lema 2.6, si denotamos por  $\mathcal{M} = \max_{\varsigma \in [0, L]} (\varphi^\varepsilon)''(\varsigma) > 0$ , se deduce

$$(\varphi^\varepsilon)'(x) \geq \left( (\varphi^\varepsilon)^\sigma(L) - (L-x)\mathcal{M} \right)_+ \equiv r(x), \quad (2.74)$$

donde también hemos utilizado que  $(\varphi^\varepsilon)' \geq 0$ . Obsérvese que  $r \equiv 0$  para todo  $x \in [0, x_0]$ , siendo  $x_0 = \frac{L\mathcal{M} - (\varphi^\varepsilon)^\sigma(L)}{\mathcal{M}}$ .

Si definimos  $f(x) = \varsigma(x)(\varphi^\varepsilon)^\sigma(x)$ , tomando  $\ell$  suficientemente próximo a  $L$  tenemos que  $\varsigma(x_0)$  se anula y, por tanto,  $f(x_0) = 0 = r(x_0)$ . Como además  $f(L) =$

$r(L)$  y  $f$  se trata de una función convexa, obtenemos que  $f(x) \leq r(x)$  para todo  $x \in [0, L]$ . Este hecho junto con (2.74) prueban que  $J(x, 0) \geq 0$ .

Nótese además que  $F^\varepsilon(x, t)$  es no negativa en el rango de parámetros considerado. Por tanto, el principio del máximo da  $J(x, t) \geq 0$  para todo  $x \in [0, L]$ . Tengamos en cuenta que  $J(L, t) = 0$ . Por tanto,  $J_x(L, t) \leq 0$ , i.e.

$$\begin{aligned} 0 &\geq u_{xx}^\varepsilon(L, t) - \zeta'(L)(u^\varepsilon)^\sigma(L, t) - \sigma(u^\varepsilon)^{\sigma-1}(L, t)u_x^\varepsilon(L, t) \\ &= \frac{m(u^\varepsilon)^{m-1}u_t^\varepsilon}{(p-1)(u_x^\varepsilon)^{p-2}}(L, t) - \zeta'(L)(u^\varepsilon)^\sigma(L, t) - \sigma(u^\varepsilon)^{2\sigma-1}(L, t) . \end{aligned}$$

Consecuentemente, debido al hecho de que  $u^\varepsilon$  permanece acotada por debajo por una constante estrictamente positiva tenemos

$$u_t^\varepsilon(L, t) \leq C (u^\varepsilon)^{1+\frac{1}{\gamma}}(L, t) \quad (2.75)$$

para una constante positiva  $C$  independiente de  $\varepsilon$ .

Para probar la estimación inferior (2.7), integramos (2.75) sobre  $(t, t_0)$ , para  $0 < t < t_0 < T$ . Esto nos da

$$\frac{C}{\gamma}(t_0 - t) + (u^\varepsilon)^{\frac{-1}{\gamma}}(L, t_0) \geq (u^\varepsilon)^{\frac{-1}{\gamma}}(L, t)$$

A continuación tomamos  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $t_0 \rightarrow T$  para tener

$$\frac{C}{\gamma}(T - t) \geq u^{\frac{-1}{\gamma}}(L, t),$$

que es efectivamente la estimación buscada, (2.7).

**2.** Demostremos a continuación que si  $m \geq 1$  entonces también podemos estimar superiormente la tasa de explosión, esto es (2.8). En primer lugar, procediendo como en [FQ], probamos que  $u^\varepsilon$  verifica dicha estimación de la tasa.

$$\begin{aligned} (u^\varepsilon)^{q+\sigma}(L, t) - \varepsilon^p &= \int_0^L ((u_x^\varepsilon)^p)_x dx \\ &= \int_0^L ((u^\varepsilon)^m)_t (u^\varepsilon)_x dx + \int_0^L (u_x^\varepsilon)^{p-1} (u^\varepsilon)_{xx} dx \\ &= ((u^\varepsilon)^m)_t u^\varepsilon(L, t) - ((u^\varepsilon)^m)_t u^\varepsilon(0, t) \\ &\quad - \int_0^L ((u^\varepsilon)^m)_{xt} u^\varepsilon dx + \frac{1}{p} ((u^\varepsilon)^{q+\sigma}(L, t) - \varepsilon^p) . \end{aligned} \quad (2.76)$$

Si  $m \geq 1$  siguiendo las ideas del Teorema 1 en [ChF] se puede ver que  $(u^\varepsilon)_{xt} \geq 0$ . En efecto, si denotamos por

$$a(z) = z^{p-1}, \quad b(z) = z^m,$$

el problema (2.1) se escribe como

$$\begin{cases} b'(u)u_t = a'(u_x)u_{xx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ a(u_x(0, t)) = 0, & t \in (0, T), \\ a(u_x(L, t)) = u^q(L, t), & t \in (0, T). \end{cases} \quad (2.77)$$

Derivando la ecuación (2.77)<sub>1</sub> respecto de espacio y tiempo, tenemos

$$\begin{aligned} & b'(u)u_t - a'(u_x)u_{xx} - 2a''(u_x)u_{xx}u_x \\ & + \left( 2b''(u)u_t - a'''(u_x)(u_{xx})^2 - a''(u_x)u_{xxx} \right) u \\ & = -b'''(u)u_x(u_t)^2 - b''(u)u_xu_{tt}, \end{aligned}$$

donde  $w = u_{xt}$ . Teniendo en cuenta en la expresión anterior las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{a'(u_x)}{b'(u)}u_{xx}, \\ u_{tt} &= \frac{a'(u_x)}{b'(u)}u_x + \frac{a''(u_x)}{b'(u)}u_{xx}u - \frac{b''(u)}{b'(u)}(u_t)^2, \end{aligned}$$

se deduce fácilmente que  $w$  verifica el siguiente problema parabólico,

$$\begin{cases} b'(u)u_t - a'(u_x)u_{xx} + A(x, t)u_x + B(x, t)u = C(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, T), \\ w(0, t) = 0, & t \in (0, T), \\ a''(u_x)u_{xx}w(L, t) = q \frac{a'(u_x)u_{xx}u^{q-1}}{b'(u)}(L, t), & t \in (0, T), \end{cases}$$

siendo

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \frac{b''(u)a'(u_x)}{b'(u)}u_x - 2a''(u_x)u_{xx}, \\ B(x, t) &= \frac{b''(u)a'(u_x)}{b'(u)}u_x - a'''(u_x)(u_{xx})^2 - a''(u_x)u_{xxx}, \\ C(x, t) &= u_x(u_t)^2 \left( \frac{(b''(u))^2}{b'(u)} - b'''(u) \right) = m(m-1)u^{m-3}. \end{aligned}$$

Entonces, si  $m \geq 1$  tenemos  $C(x, t) \geq 0$ , y aplicando el principio del máximo deducimos  $w \geq 0$ .

Por tanto  $((u^\varepsilon)^m)_{xt} \geq 0$ , lo que con la identidad anterior (2.76) implica

$$(u^\varepsilon)_t(L, t) \geq \frac{(p-1)}{mp} (u^\varepsilon)^{1+\frac{1}{\gamma}}(L, t) \left[ 1 - \frac{\varepsilon^p}{(u^\varepsilon)^m(L, t)} \right].$$

Integrando en primer lugar esta desigualdad sobre  $(t, t_0)$  para  $t_0 < T$ , tomando después  $\varepsilon \rightarrow 0$  y, finalmente tomando  $t_0 \rightarrow T$ , obtenemos la estimación superior de la tasa (2.8).

**3.** Demostremos a continuación que las soluciones  $u^\varepsilon$  del problema aproximado (2.11) están acotadas por una función que únicamente se hace singular en  $x = L$ , esto es, vamos a probar para estas soluciones la estimación (2.9).

Para ello consideramos nuevamente el funcional

$$J(x, t) = u_x^\varepsilon(x, t) - \varsigma(x)(u^\varepsilon)^\sigma(x, t), \quad \sigma = \frac{q}{(p-1)},$$

dado en (2.73). Teniendo en cuenta que es positivo y que además  $\varsigma(x) = \left( \frac{(x-\ell)_+}{L-\ell} \right)^n$  es creciente, tenemos

$$u_x^\varepsilon(x, t) \geq \varsigma(x_0)(u^\varepsilon)^\sigma(x, t) \quad \forall x \in [x_0, L], \quad \ell < x_0 < L. \quad (2.78)$$

Integramos (2.78) sobre  $(x, L)$ , para  $x \geq x_0$ , y llegamos a

$$u^\varepsilon(x, t) \leq [(\sigma-1)\varsigma(x_0)(L-x)]^{-1/(\sigma-1)}.$$

Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtenemos la acotación buscada para la solución de nuestro problema, por una función singular únicamente en  $x = L$ . Se concluye así la explosión puntual en  $x = L$ .

**4.** Para probar (2.10) y describir así, de forma más precisa cómo es nuestra solución en esos puntos, recordemos que en el Lema 2.6 obteníamos la estimación

$$u(x, t) \geq u(x, s) \geq u(L, s) - u^\sigma(L, s)(L-x),$$

para cualquier  $s \in [0, t]$  y  $x \in [0, L]$ . Definimos ahora  $v(t) \equiv d(T-t)^{-\gamma}$ , donde  $d, \gamma$  son las mismas constantes que intervienen en la cota inferior de la tasa de explosión (2.7). Se tiene por tanto  $u(L, t) \geq v(t)$  para todo  $t \in [0, T]$ . En consecuencia

$$u(x, t) \geq \max_{\varphi(L) \leq y \leq u(L, t)} \{y - y^\sigma(L-x)\} \geq \max_{\varphi(L) \leq y \leq v(t)} \{y - y^\sigma(L-x)\}. \quad (2.79)$$

Sin embargo, para cada  $x \in [0, L]$  fijo, este último máximo se alcanza en el punto  $y_0 = (\sigma(L - x))^{-\frac{1}{\sigma-1}}$ , siendo su valor

$$\max_{0 \leq y < \infty} \{y - y^\sigma(L - x)\} = C(q, p)(L - x)^{-\frac{1}{\sigma-1}}. \quad (2.80)$$

Este punto  $y_0$  permanece dentro del intervalo  $[\varphi(L), v(t)]$  para todo  $x$  cumpliendo

$$0 \leq x \leq L - \sigma^{-1} [d(T - t)]^{\gamma/\alpha}.$$

De aquí se deduce fácilmente la estimación (2.10) del Teorema 2.3, y se concluye la prueba.  $\square$





---

## *Conjuntos de explosión de dimensión menor que el espacio ambiente*

Nuestro principal objetivo en este capítulo es encontrar algunos ejemplos de soluciones de problemas de tipo parabólico cuyos conjuntos de explosión son no triviales y de dimensión estrictamente menor que la dimensión del espacio ambiente.

Con este fin consideraremos diferentes operadores de difusión en las distintas variables que intervienen, tómese por caso,  $u_t = (u^m)_{xx} + u_{yy} + u^m$ , en  $\mathbb{R}^2$ . Probamos que para esta ecuación existe una solución que explota en el segmento  $B(u) = [-L, L] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Otros operadores y generalizaciones a más dimensiones son tratados de la misma manera.

También encontraremos ejemplos interesantes en el semiespacio,  $\mathbb{R}_+^{N+M}$ . Para ello probaremos la existencia de soluciones no triviales de soporte compacto de la ecuación  $\nabla(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) = \varphi^m$  en el semiespacio  $\mathbb{R}_+^N$  con la condición de borde no lineal  $-|\nabla\varphi|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = \varphi^{p-1}$  sobre  $\partial\mathbb{R}_+^N$ . Este resultado tiene también interés en sí mismo.

### Contenido

---

3.1. Introducción . . . . .	92
3.2. Resultado principal . . . . .	93
3.3. Existencia de una solución de soporte compacto del problema elíptico . . . . .	97
1. Existencia y propiedades de las soluciones del problema auxiliar . . . . .	99
2. Estudio del problema elíptico . . . . .	110

---

### 3.1 Introducción

Dedicamos este capítulo al estudio de los conjuntos de explosión de las soluciones de ciertos problemas parabólicos. Como ya dijimos en la Introducción de este trabajo, existen soluciones de ciertos problemas, como es el caso de la ecuación de los medios porosos con una fuente no lineal,

$$u_t = \Delta u^m + u^p,$$

que presentan los tres tipos de explosión, según sea el valor de los exponentes  $m$  y  $p$ . Por ejemplo, para un dato inicial radial con un único máximo en el origen, se tiene:

- i) Explosión global si  $1 < p < m$ .
- ii) Explosión regional en bolas, i.e.  $B(u) = \{|x| \leq r\}$ , si  $p = m$ .
- iii) La explosión se reduce a un punto si  $p > m$

Además, se pueden encontrar soluciones de la ecuación anterior para  $m = 1$  explotando en esferas.

Pero hasta la fecha, se trataban éstos de los únicos conjuntos de explosión compactos no triviales conocidos en la literatura. El principal objetivo de este capítulo será construir otros muchos ejemplos diferentes de conjuntos de explosión compactos que sean no triviales y de dimensión arbitrariamente menor que el espacio ambiente.

Como un primer ejemplo sencillo, encontramos una ecuación parabólica con una solución cuyo conjunto de explosión es un segmento en  $\mathbb{R}^2$ ,  $B(u) = [-L, L] \times \{0\}$ . En general, dadas dos dimensiones cualesquiera,  $N, M$ , existe una solución de un problema parabólico en  $\mathbb{R}^{N+M}$ , con conjunto de explosión un disco,  $B(u) = B(0, L) \times \{0\}$ , donde  $B(0, L)$  es la bola  $N$ -dimensional en  $\mathbb{R}^N$  de radio  $L$ . Trataremos también problemas en el espacio  $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M$ , cuyas soluciones explotan en compactos no triviales  $N$ -dimensionales.

Para construir los ejemplos citados proponemos analizar los siguientes problemas.

• En primer lugar consideraremos dos problemas cuyo término de reacción actúa sobre el dominio, el espacio producto  $\mathbb{R}^{N+M}$  y con difusión diferente dependiendo de la dirección. En particular, consideremos los problemas:

$$u_t = \Delta_x u^m + \Delta_y u + u^m, \quad \text{en } \mathbb{R}^{N+M} \times (0, T), \quad (3.1)$$

con  $m > 1$ , y

$$u_t = \nabla_x (|\nabla_x u|^{p-2} \nabla_x u) + \Delta_y u + u^{p-1}, \quad \text{en } \mathbb{R}^{N+M} \times (0, T), \quad (3.2)$$

con  $p > 2$ .

Aquí y en adelante, el subíndice denota derivadas con respecto de las primeras  $N$  variables ( $x$ ) o con respecto a las últimas  $M$  variables ( $y$ ). Subrayamos que el operador de difusión en (3.1) se trata de una combinación del operador medio poroso y el Laplaciano usual en diferentes espacios de variables, mientras que el operador que interviene en (3.2) es una combinación del  $p$ -laplaciano y del Laplaciano.

• A continuación estudiaremos el siguiente problema parabólico, combinando el operador doblemente no lineal en  $\mathbb{R}_+^N = \{x_N > 0\}$  (con  $p > 2$  y  $m > 0$  como parámetros) y el operador laplaciano en  $\mathbb{R}^M$ , en el espacio producto  $\mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M$ . La explosión en este caso viene producida por una reacción no lineal en la frontera:

$$\begin{cases} (u^m)_t = \nabla_x (|\nabla_x u|^{p-2} \nabla_x u) + \Delta_y u^m, & \text{en } \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M \times (0, T), \\ -|\nabla_x u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_N} = u^{p-1}, & \text{sobre } \partial \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M \times (0, T), \end{cases} \quad (3.3)$$

donde  $x \in \mathbb{R}_+^N$  e  $y \in \mathbb{R}^M$ .

Para ambos tipos de problemas buscaremos datos iniciales que produzcan los conjuntos de explosión deseados.

### 3.2 Resultado principal

Enunciamos el resultado principal del capítulo:

**Teorema 3.1** *i) Existe  $L > 0$  tal que, para dos conjuntos cualesquiera de puntos  $\{y_1, \dots, y_k\} \in \mathbb{R}^M$ ,  $\{x_1, \dots, x_j\} \in \mathbb{R}^N$ , con  $|x_i - x_j| > 2L$ , existe una solución de (3.1) (o de (3.2)) cuyo conjunto de explosión es*

$$B(u) = \bigcup_{i=1}^j B(x_i, L) \times \{y_1, \dots, y_k\}.$$

*ii) Existe una solución de (3.3) cuyo conjunto de explosión está compuesto por una cantidad arbitraria de componentes conexas de dimensión  $N$ .*

***Demostración del Teorema 3.1.***

Para demostrar este resultado únicamente se ha de buscar una solución en variables separadas adecuada. Ésta será de la forma

$$u(x, y, t) = \varphi(x)\psi(y, t). \quad (3.4)$$

Entonces  $\varphi$  y  $\psi$  habrán de satisfacer ciertos problemas elíptico y parabólico, respectivamente.

El problema elíptico que verifica  $\varphi$  variará según el ejemplo que tratemos, aunque en todo caso nuestro objetivo es buscar condiciones para obtener  $\varphi$  de soporte compacto. Este hecho implica que el conjunto de explosión de una solución de la forma (3.4) está dado por

$$B(u) = \text{supp}(\varphi) \times B(\psi), \quad (3.5)$$

siendo  $B(\psi)$  el conjunto de explosión de  $\psi$ .

En todos los ejemplos  $\psi$  (o una potencia suya) obedecerá la siguiente ecuación parabólica:

$$\psi_t(y, t) = \Delta_y \psi(y, t) + \psi^\gamma(y, t), \quad (y, t) \in \mathbb{R}^M \times (0, T). \quad (3.6)$$

Destacamos que la ecuación anterior se trata de la ecuación del calor con una fuente dada por el término  $\psi^\gamma$ , la cual presenta soluciones que explotan para  $\gamma > 1$  y condiciones iniciales grandes.

Es sabido que para esta ecuación el conjunto  $B(\psi)$  lo constituye, de forma genérica, un número finito de puntos [ChM, MW, W2]. Es más, [M] prueba

que dados los puntos  $\{y_1, \dots, y_k\} \in \mathbb{R}^M$ , siempre se pueden construir soluciones de (3.10), cuyo conjunto de explosión sea precisamente este conjunto.

Así pues, para encontrar el conjunto  $B(u) = \text{supp}(\varphi) \times \{y_1, \dots, y_k\}$  deseado necesitamos identificar el soporte de  $\varphi$ .

- Comenzamos determinando el conjunto de explosión para el problema (3.1). Al separar variables en (3.1) definiendo  $u$  como en (3.4), tenemos que la función  $\varphi$  verifica la ecuación elíptica

$$\varphi(x) = \Delta_x \varphi^m(x) + \varphi^m(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (3.7)$$

y como ya dijimos,  $\psi$  obedece la ecuación del calor con una reacción  $\psi^m$ , dada en (3.6).

La identificación del soporte de  $\varphi$  se basa en el hecho de que existe una única solución radial de (3.7) con  $\varphi^m \in H^1(\mathbb{R}^N)$ , véase [CEF]. Este hecho es simple de comprobar, pues buscar soluciones radiales reduce (3.7) a un problema de E.D.O. En una dimensión espacial,  $N = 1$ , la solución viene dada de forma explícita por la fórmula

$$\varphi(x) = \left( \frac{2m}{m^2 - 1} \cos^2 \left( \frac{m-1}{2m} x \right) \right)_+.$$

En más dimensiones espaciales se sabe que una solución genérica de (3.7) (en el espacio natural de energía  $H^1(\mathbb{R}^N)$ ) consiste en una unión de un número finito de copias disjuntas de los perfiles radiales centrados en ciertos puntos  $x_1, \dots, x_j$  con  $|x_i - x_j| > 2L$ , donde  $L$  es el radio del soporte de la única solución radial, véase [CEF].

Por lo tanto, por (3.5) concluimos que existe una solución de (3.1) cuyo conjunto de explosión es

$$B(u) = \bigcup_{i=1}^j B(x_i, L) \times \{y_1, \dots, y_k\}.$$

- Es posible realizar un análisis similar para las soluciones de (3.2). En este caso,  $\varphi$  obedece el siguiente problema:

$$\varphi(x) = \nabla_x (|\nabla_x \varphi|^{p-2} \nabla_x \varphi(x)) + \varphi^{p-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (3.8)$$

mientras que  $\psi$  es nuevamente solución de la ecuación del calor con reacción, (3.6).

La demostración concluye exactamente como antes, teniendo en cuenta que es sabido que el problema (3.8) presenta soluciones radiales de soporte compacto, véase [SGKM].

• Para completar la prueba, notemos que si  $u$  es solución de (3.3) en variables separadas de la forma (3.4), entonces  $\varphi$  y  $\psi$  deberán resolver los siguientes problemas elíptico y parabólico, respectivamente,

$$\begin{cases} \varphi^m = \nabla(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi), & \text{en } \mathbb{R}_+^N, \\ -|\nabla\varphi|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = \varphi^{p-1}, & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^N, \end{cases} \quad (3.9)$$

y

$$(\psi^m)_t = \Delta\psi^m + \psi^{p-1}, \quad \text{en } \mathbb{R}^M \times (0, T), \quad (3.10)$$

Obsérvese que la ecuación anterior escrita para  $\tilde{\psi} = \psi^m$  no es sino la ecuación del calor con una fuente dada por el término  $\tilde{\psi}^{(p-1)/m}$ , cuyas soluciones son globales si  $p-1 \leq m$ . Ya que nuestro interés reside en identificar el conjunto de explosión de  $u$ , consideraremos  $p-1 > m$  en lo que sigue.

Si  $\varphi$  es de soporte compacto, tomando datos iniciales tales que  $B(\psi) = \{y_1, \dots, y_k\}$ , el conjunto de explosión de  $u$  lo forma un número arbitrario de componentes conexas, esto es,  $B(u) = K \times \{y_1, \dots, y_k\}$ , siendo  $K = \text{supp}(\varphi)$ .

La prueba de la compacidad del soporte de  $\varphi$ , que completaría la de este teorema, será algo más delicada, y a ella dedicaremos las siguientes páginas.

Llegados a este punto, recordemos que por resultados bien conocidos, la existencia de tales soluciones de soporte compacto para la ecuación  $\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = u^\alpha$  en todo  $\mathbb{R}^N$ , es posible si y solamente si  $p-1 > \alpha$ , véase [PuS]. Lo que indica que nuestra hipótesis  $p-1 > m$  resulta natural también en este sentido.

Una vez realizado este análisis, se deduce de forma sencilla un corolario concerniente al problema (3.3).

**Corolario 3.2** *Si  $1 < (p-1)/m < 1 + 2/M$  toda solución de (3.3) no negativa y no trivial, explota en tiempo finito.*

**Demostración.** Asíumase que  $v$  es una solución global no negativa. Como  $v$  es una solución de (3.3) su soporte en  $x$  se expande (siendo la totalidad del espacio

en  $y$ ) y finalmente cubre el soporte de cualquier solución de la forma  $u(x, y, t) = \varphi(x)\psi(y, t)$ . La prueba concluye utilizando argumentos de comparación, teniendo en cuenta que toda solución de (3.10) explota cuando  $(p-1)/m$  está por debajo del exponente crítico de Fujita, esto es,  $1 < (p-1)/m < 1 + 2/M$ .  $\square$

Más aún, conjeturamos que tales soluciones en variables separadas introducidas anteriormente, muestran el comportamiento asintótico de cualquier solución de (3.3) cerca de su tiempo de explosión.

### 3.3 Existencia de una solución de soporte compacto del problema elíptico

Sea  $\varphi$  una solución del problema (3.9), que recordamos a continuación:

$$\begin{cases} \varphi^m = \nabla(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi), & \text{en } \mathbb{R}_+^N, \\ -|\nabla\varphi|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = \varphi^{p-1}, & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^N. \end{cases}$$

Como ya vimos en el Capítulo 2 de esta tesis, en una dimensión espacial el soporte de  $\varphi$  es explícito, ya que mediante un cambio de variables, (3.9) se reduce al siguiente problema de E.D.O., que es equivalente al problema (2.50),

$$\begin{cases} ((\omega_x)^{p-1})_x = \beta\omega^m, \\ -\omega_x(0) = \omega(0), \quad \omega_x(L) = 0. \end{cases}$$

Demostramos que  $\text{supp}(\omega) = [0, L^*]$ , con  $L^* = \frac{p}{p-1-m}$ .

Por otra parte, el estudio de este problema para el caso  $p = 2$  (difusión lineal) se puede encontrar en [DR].

Así pues, lo que necesitamos es extender el resultado de existencia de un perfil de soporte compacto  $\varphi$  a varias dimensiones espaciales. Al realizar tal extensión surgen nuevas dificultades, ya que la condición de borde impide elegir  $\varphi$  como una función radial, no siendo posible, en consecuencia, reducir (3.9) a una E.D.O. No obstante, podemos buscar soluciones que sean radiales en las variables tangenciales, esto es, denotando  $x \in \mathbb{R}_+^N$  por  $x = (x', x_N)$ ,  $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ , entonces  $u$  verifica

$$u(x', x_N) = u(|x'|, x_N). \quad (3.11)$$

El principal resultado de esta parte del presente capítulo es el siguiente:

**Teorema 3.3** *Sea  $p - 1 > m$ ; entonces existe una solución de (3.9) no negativa y no trivial de soporte compacto, cumpliendo (3.11).*

*Más aún, toda solución  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$  de (3.9) no negativa y no trivial, es de soporte compacto y radial en las variables tangenciales en el sentido (3.11).*

Observamos que el problema de unicidad excepto traslaciones en las variables tangenciales  $(x_1, \dots, x_{N-1})$  de soluciones de soporte compacto de (3.9) continúa abierto.

Expongamos brevemente la estrategia a seguir para probar el Teorema 3.3. Primero, para  $R > 0$  suficientemente grande, planteamos el siguiente problema

$$\begin{cases} \nabla(|\nabla u_R|^{p-2} \nabla u_R) = (u_R)^m, & \text{en } B_R^+, \\ -|\nabla u_R|^{p-2} \frac{\partial u_R}{\partial x_N} = (u_R)^{p-1}, & \text{sobre } \Gamma_0, \\ u_R = 0, & \text{sobre } \Gamma_+, \end{cases} \quad (3.12)$$

donde  $B_R^+$  denota la semibola  $B(0, R)_+ = \{x, |x| < R, x_N > 0\}$ ,  $\Gamma_0 = \partial B_R^+ \cup \{x_N = 0\}$  y  $\Gamma_+ = \partial B_R^+ \cup \{x_N > 0\}$ .

Un primer paso será estudiar el problema auxiliar (3.12) en la semibola. Deducimos un principio de comparación, junto con algunas propiedades de simetría y crecimiento que satisfacen estas soluciones. Utilizamos como referencia el trabajo [FR], donde se estudia el problema en un dominio acotado con condición de Neumann en toda la frontera.

Estas propiedades nos permitirán probar que el soporte de tales soluciones se encuentra incluido estrictamente en la semibola, esto es, demostraremos que para  $R$  suficientemente grande existe una solución no negativa y no trivial de (3.12) tal que

$$\max_{x \in \text{supp}(u_R)} |x| < R. \quad (3.13)$$

Este hecho nos provee de una solución de nuestro problema original, ya que  $u_R$  será una solución de soporte compacto de (3.9). Es más, utilizando algunas de las técnicas empleadas para deducir (3.13), probamos que de hecho toda solución  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$  de (3.9) no negativa y no trivial, es de soporte compacto y radial en las variables tangenciales.



**1. Existencia y propiedades de las soluciones del problema auxiliar.**

En esta parte del capítulo estudiamos el problema (3.12). Trataremos de encontrar soluciones no triviales del mismo en un marco variacional natural. Consideremos el espacio  $W = \{u \in W^{1,p}(B_R^+) \text{ verificando } u|_{\Gamma_+} = 0\}$  con la norma

$$\|u\|_W^p = \int_{B_R^+} |\nabla u|^p.$$

Obsérvese que la desigualdad de Poincaré se aplica también a funciones que se anulan en una parte no trivial de la frontera del dominio. Es más,  $\|\cdot\|_W$  es equivalente a la norma usual  $W^{1,p}$  en  $W$ .

Minimizando el funcional

$$J_R(u) = \frac{\left( \int_{B_R^+} |\nabla u|^p - \int_{\Gamma_0} u^p \right)}{\frac{p}{m+1} \left( \int_{B_R^+} u^{m+1} \right)^{p/(m+1)}}$$

sobre  $W$ , encontraremos una solución no trivial a (3.12). En [FR] se pueden consultar argumentos similares.

**Lema 3.4** *Para todo  $R$  suficientemente grande  $J_R$  alcanza un mínimo en  $W$ . Más aún, existe un minimizante no trivial que es solución débil de (3.12).*

**Demostracion.** La demostración la llevaremos a cabo en varios pasos.

- Comenzamos viendo que, para todo  $R$  grande, existe una constante  $K(R)$  tal que

$$\inf_{u \in W, u \neq 0} J_R(u) \geq -K > -\infty,$$

esto es,

$$\int_{B_R^+} |\nabla u|^p + K \left( \int_{B_R^+} u^{m+1} \right)^{p/(m+1)} \geq \int_{\Gamma_0} u^p, \quad \forall u \in W.$$

De no ser así, para todo  $n$  existiría una solución  $u_n \in W$  tal que  $\int_{\Gamma_0} u_n^p = 1$ , verificando además

$$\int_{B_R^+} |\nabla u_n|^p + n \left( \int_{B_R^+} u_n^{m+1} \right)^{p/(m+1)} \leq 1, \quad \forall n \geq 1. \quad (3.14)$$

De (3.14) se deduce que existe una subsucesión que denotamos de nuevo por  $u_n$  tal que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{débilmente en } W, \\ u_n &\rightarrow u && \text{fuertemente en } L^p(B_R^+), \\ u_n|_{\Gamma_0} &\rightarrow u && \text{fuertemente en } L^p(\Gamma_0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

De la última convergencia se sigue que  $\int_{\Gamma_0} u^p = 1$ . Por otro lado, (3.14) implica a su vez que  $u = 0$ , lo que supone una contradicción.

- El siguiente paso consiste en demostrar que

$$\inf_{u \in W, u \neq 0} J_R(u) < 0,$$

lo cual descarta que el minimizante sea trivial. Para ello basta con probar que el funcional  $J_R$  es estrictamente negativo al aplicarlo a  $\varphi_{1,R}$ , la autofunción asociada al primer autovalor  $\lambda_1(R)$  del siguiente problema

$$\begin{cases} \nabla(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) = 0, & \text{en } B_R^+, \\ -|\nabla\varphi|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_N} = \lambda\varphi^{p-1}, & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \varphi = 0, & \text{sobre } \Gamma_+. \end{cases} \quad (3.16)$$

Si  $R$  es suficientemente grande, la existencia de tal autovalor y de la autofunción positiva correspondiente se obtiene fácilmente siguiendo las líneas de [FR], por lo que omitimos aquí la prueba. Afirmamos que, para  $R$  grande,

$$J_R(\varphi_{1,R}) = \frac{(\lambda_1(R) - 1) \int_{\Gamma_0} \varphi_{1,R}^p}{\frac{p}{m+1} \left( \int_{B_R^+} \varphi_{1,R}^{m+1} \right)^{p/(m+1)}} < 0. \quad (3.17)$$

Es fácil ver, mediante la dilatación  $x \rightarrow Rx$ , que la dependencia del primer autovalor con el radio es

$$\lambda_1(R) = \frac{\lambda_1(1)}{R}.$$

Tomando entonces  $R$  suficientemente grande obtenemos que  $\lambda_1(R) < 1$  y la afirmación anterior (3.17) queda demostrada.

- A continuación veamos que se alcanza el mínimo de  $J_R$  en  $W$ .

Consideramos  $u_n$ , una sucesión minimizante para  $J_R$ , tal que  $\int_{\Gamma_0} u_n^p = 1$ . Para  $n$  grande se tiene  $J_R(u_n) < 0$  por el paso anterior, lo cual implica que  $\int_{B_R^+} |\nabla u_n|^p < 1$ . Esto no sólo asegura las convergencias dadas en (3.15) sino también que el límite  $u$  es no trivial. Supongamos que  $u \geq 0$ . De la semicontinuidad inferior de la norma y de la convergencia débil se infiere que

$$\inf J_R \leq J_R(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J_R(u_n) = \inf J_R.$$

• Finalmente, por homogeneidad, multiplicando el minimizante por una constante adecuada, obtenemos una solución de (3.12).

Encontramos dicha constante minimizando  $J_R$  entre las funciones de  $W$  con  $\int_{B_R^+} u^{m+1} = 1$ , lo cual nos da la existencia de un multiplicador de Lagrange verificando

$$\int_{B_R^+} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \int_{\Gamma_0} u^{p-1} v = \lambda \int_{B_R^+} u^m v, \quad \forall v \in W.$$

Tomando  $v = u$  en la expresión anterior tenemos que  $\lambda < 0$ , ya que este autovalor tiene el mismo signo que  $J_R(u)$ . No es difícil comprobar que  $(-\lambda)^{1/(p-m-1)}u$  es un minimizante que resuelve además (3.12).  $\square$

Las estimaciones que incluimos a continuación nos serán de gran utilidad a lo largo de la siguiente sección. Como veremos más tarde, serán asimismo aplicables a las soluciones de nuestro problema original.

**Lema 3.5** *Sea  $R$  suficientemente grande. Entonces, si  $u_R$  es un minimizante no negativo de  $J_R$ , existe una constante  $C$  independiente de  $R$  tal que*

$$\|u_R\|_{L^{m+1}(B_R^+)} \leq C, \quad \|u_R\|_{L^\infty(B_R^+)} \leq C, \quad \|\nabla u_R\|_{L^\infty(B_{R/2}^+)} \leq C.$$

**Demostración.** Tomemos  $R_0$  tal que el primer autovalor del problema (3.16) verifique  $\lambda_1(R_0) - 1 < 0$ . Extendemos por cero la primera autofunción asociada a  $\lambda_1(R_0)$ , y la denotamos por  $\varphi_{1,R_0}$ . Para  $R > R_0$  se tiene

$$\inf J_R \leq J_R(\varphi_{1,R_0}) = \frac{(\lambda_1(R_0) - 1) \int_{\Gamma_0} \varphi_{1,R_0}^p}{\frac{p}{m+1} \left( \int_{B_R^+} \varphi_{1,R_0}^{m+1} \right)^{p/(m+1)}} = -C_0. \quad (3.18)$$

Por otro lado, multiplicando la ecuación del problema auxiliar (3.12) por  $u_R$  e integrando por partes obtenemos

$$-\int_{B_R^+} |\nabla u_R|^p + \int_{\Gamma_0} u_R^p = \int_{B_R^+} u_R^{m+1}.$$

De esta igualdad y de (3.18) se deduce

$$\frac{m+1}{p} \left( \int_{B_R^+} u_R^{m+1} \right)^{1-\frac{p}{m+1}} = -J(u_R) \geq C_0.$$

Como  $p > m+1$  la primera estimación se obtiene de forma inmediata. Las estimaciones restantes se infieren de la teoría general de regularidad, véase [T].  $\square$

En el próximo lema incluimos algunas estimaciones de cálculo que serán útiles en relación con el operador  $p$ -laplaciano.

**Lema 3.6** *Para todo  $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^N$ , existen constantes positivas tales que*

*i) si  $p \geq 1$  y  $|\eta| + |\eta'| > 0$  se cumple que*

$$\left| |\eta|^{p-2}\eta - |\eta'|^{p-2}\eta' \right| \leq C_1 |\eta - \eta'| (|\eta| + |\eta'|)^{p-2}, \quad (3.19)$$

*ii) si  $p \geq 2$  tenemos que  $|\eta|^p \geq |\eta'|^p - p|\eta|^{p-2}\langle \eta, \eta - \eta' \rangle + C(p)|\eta - \eta'|^p$ , de donde fácilmente se deduce:*

$$\langle |\eta|^{p-2}\eta - |\eta'|^{p-2}\eta', \eta - \eta' \rangle \geq C(p)|\eta - \eta'|^p. \quad (3.20)$$

Mediante el uso de las desigualdades anteriores demostramos que es posible comparar dos soluciones de (3.12) a pesar de la condición de contorno tipo Neumann, siempre que la medida de la región de dicho borde sea suficientemente pequeña. Este principio de comparación constituye una pieza clave en varias de las demostraciones que llevaremos a cabo. Para ello introducimos el concepto de sub y supersolución del siguiente problema en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}_+^N$ ,

$$\begin{cases} \nabla(|\nabla\omega|^{p-2}\nabla\omega) - \omega^m = 0, & \text{en } \Omega, \\ \omega = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_N > 0\}, \\ -|\nabla\omega|^{p-2}\frac{\partial\omega}{\partial x_N} = \omega^{p-1}, & \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_N = 0\}, \end{cases} \quad (3.21)$$

**Definición 3.1** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}_+^N$  un dominio abierto y acotado, con frontera Lipschitz. Decimos que  $\omega \in W^{1,p}(\Omega)$ , es supersolución del problema (3.21) si verifica

$$\begin{cases} \omega^m \geq \nabla(|\nabla\omega|^{p-2}\nabla\omega), & \text{en } \Omega, \\ \omega = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_N > 0\}, \\ -|\nabla\omega|^{p-2}\frac{\partial\omega}{\partial x_N} \geq \omega^{p-1}, & \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_N = 0\}, \end{cases} \quad (3.22)$$

Diremos que  $\omega$  es subsolución si verifica (3.22) con " $\leq$ " en lugar de " $\geq$ ".

**Lema 3.7** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}_+^N$  un dominio abierto y acotado, con frontera Lipschitz. Supongamos que  $\omega_i \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $i = 1, 2$  son sub y super soluciones acotadas del problema (3.21), respectivamente. Si la medida  $N - 1$  dimensional del conjunto  $\partial\Omega \cap \{x_N = 0\}$  verifica  $\mu(\partial\Omega \cap \{x_N = 0\}) < \delta$  para algún  $\delta > 0$  pequeño, entonces  $(\omega_2 - \omega_1) \geq 0$  en  $\Omega$ .

**Demostracion.** Multiplicamos las desigualdades que cumplen  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2$  por  $h(\omega_2 - \omega_1)$  e integramos en  $\Omega$ , siendo  $h(x) = -\min\{0, x\}$ . Esto da

$$\int_{\Omega} \left( \nabla(|\nabla\omega_2|^{p-2}\nabla\omega_2) - \nabla(|\nabla\omega_1|^{p-2}\nabla\omega_1) \right) h(\omega_2 - \omega_1) \leq \int_{\Omega} (\omega_2^m - \omega_1^m) h(\omega_2 - \omega_1).$$

Tras integrar por partes utilizando la condición de borde tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \cap A} \left( |\nabla\omega_2|^{p-2}\nabla\omega_2 - |\nabla\omega_1|^{p-2}\nabla\omega_1 \right) \nabla(\omega_2 - \omega_1) \\ & \quad + \int_{\Omega \cap A} (\omega_2^m - \omega_1^m)(\omega_2 - \omega_1) \\ & \leq \int_{\partial\Omega \cap \{x_N=0\} \cap A} (\omega_2^{p-1} - \omega_1^{p-1})(\omega_2 - \omega_1), \end{aligned}$$

donde  $A = \{x \in \Omega \text{ tal que } \omega_2(x) \leq \omega_1(x)\}$ . Aplicando (3.20) del lema previo a la primera integral de la expresión anterior y (3.19) a la última integral, obtenemos

$$\begin{aligned} & C_1(p) \int_{\Omega} |\nabla h(\omega_2 - \omega_1)|^p + \int_{\Omega \cap A} (\omega_2^m - \omega_1^m)(\omega_2 - \omega_1) \\ & \leq C_2(\|\omega_i\|_{\infty}, p) \int_{\partial\Omega \cap \{x_N=0\}} \left( h(\omega_2 - \omega_1) \right)^2 \\ & \leq C_2 \left( \int_{\partial\Omega \cap \{x_N=0\}} h(\omega_2 - \omega_1)^p \right)^{2/p} \left( \mu(\partial\Omega \cap \{x_N = 0\}) \right)^{1-2/p}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

aplicando por último la desigualdad de Hölder a la integral de contorno, dado que  $p > 2$ . De la siguiente inclusión,  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\partial\Omega)$ , obtenemos

$$\left( \int_{\partial\Omega \cup \{x_N=0\}} |h|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \int_{\Omega} |\nabla h|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nótese que la condición de contorno se anula sobre una parte del borde, con lo que hemos aplicado además la desigualdad de Poincaré. Consideramos la estimación anterior en (3.23), teniendo en cuenta además que la segunda integral que allí aparece es positiva se tiene

$$\|\nabla h\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \|\nabla h\|_{L^p(\Omega)}^2 \left( \mu(\partial\Omega \cap \{x_N = 0\}) \right)^{1-2/p}. \quad (3.24)$$

Llegados a este punto es fácil ver que, si tomamos  $h(x) = -K \min\{0, x\}$ , con  $K > 0$ , todos los razonamientos anteriores siguen siendo válidos. A partir de este momento, supongamos que  $\omega_1 \neq \omega_2$ , ya que si fueran iguales estarían ordenadas y finalizaría la prueba. Entonces, debido a que  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  sobre  $\partial\Omega \cap \{x_N > 0\}$ , tenemos que  $\nabla h(\omega_2 - \omega_1) \neq 0$ . Por lo tanto, tomando la constante  $K$  suficientemente grande, obtenemos  $\|\nabla h\|_{L^p(\Omega)} > 1$ . Así pues, si  $\mu(\partial\Omega \cap \{x_N = 0\})$  es suficientemente pequeño, el hecho de que  $p > 2$  y la estimación (3.24) implican que  $h(\omega_2 - \omega_1) \equiv 0$  en  $\Omega$  y el principio de comparación queda probado.  $\square$

**Observación 3.1** *La prueba anterior es la única donde se utiliza la hipótesis  $p > 2$  de manera esencial. Como ya demostramos en el anterior capítulo, en una dimensión espacial tenemos compacidad del soporte de las soluciones de (3.9). Sería deseable por tanto, establecer un principio de comparación en más dimensiones para  $1 < p < 2$ . El resultado para  $p = 2$  es cierto y se encuentra en [DR].*

Proseguimos el estudio del problema (3.12) demostrando que sus soluciones son radiales en las variables tangenciales, i.e., verifican (3.11). Más adelante veremos que también las soluciones de (3.9) cumplen esta propiedad.

Para llevar a cabo esta tarea, establezcamos alguna notación útil para aplicar el método de los planos móviles, que figura en [GNN]. Definimos para  $i = 1, \dots, N$ ,  $S_i^\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tales que } x_i > \lambda\}$ ,  $\Pi_i^\lambda$  el hiperplano  $\partial S_i^\lambda$  y  $x^\lambda = 2(\lambda - x_i)e_i + x$ , esto es, la reflexión con respecto a  $\Pi_i^\lambda$ . Finalmente,  $u_R^\lambda(x) = u_R(x^\lambda)$  y  $v^\lambda = u_R^\lambda - u_R$ . Supongamos que  $D = \text{supp}(u_R) \subseteq B_R^+$  es conexo.

**Lema 3.8** Sea  $u_R$  una solución de (3.12). Entonces se satisface (3.11). Es más,  $u_R(|x'|, x_N)$  es decreciente en  $|x'|$  y  $x_N$ .

**Demostracion.** Este resultado lo probamos en varias etapas.

*Primera etapa.* Demostremos que si  $v^\lambda(x_0) = 0$  para cualquier  $x_0 \in S_1^\lambda$ , entonces  $v^\lambda \equiv 0$  en  $S_1^\lambda$ .

Una demostración similar figura en el Lema 2.1 en [CEF] para cualquier punto  $x_0 \in S_1^\lambda \cap \mathbb{R}_+^N$ . Sobre  $\{x_N = 0\}$  aplicamos el Lema de Hopf para concluir que  $v^\lambda \equiv 0$ .

*Segunda etapa.* Definimos

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } v^\lambda(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in S_1^\lambda\}.$$

Como trabajamos en un dominio acotado  $B_R^+$ , entonces  $\lambda_0$  está bien definida y además  $-\infty < \lambda_0 < \infty$ . Veamos que  $S_1^{\lambda_0} \cap D \neq \emptyset$ .

Si  $\lambda$  es grande entonces  $S_1^\lambda \cap D = \emptyset$  y consecuentemente  $v^\lambda \geq 0$ , mientras que si  $-\lambda$  es grande se tiene que  $(\mathbb{R}_+^N \setminus S_1^\lambda) \cap D = \emptyset$ , lo que implica que  $v^\lambda < 0$ . Nótese que es posible tomar  $\tilde{\lambda}$  de forma que  $\mu(S_1^{\tilde{\lambda}} \cap D \cap \{x_N = 0\})$  sea suficientemente pequeño, y aplicar así el Lema 3.7 a  $u_R^{\tilde{\lambda}}$  y  $u_R$  en  $S_1^{\tilde{\lambda}} \cap D \cap \mathbb{R}_+^N$ , dando  $v^{\tilde{\lambda}} \geq 0$ .

*Tercera etapa.*  $v^{\lambda_0}$  se anula en  $S_1^{\lambda_0} \cap \mathbb{R}_+^N$ , lo cual implica que  $u_R$  es simétrica respecto del plano  $\Pi_1^{\lambda_0}$ .

Razonando por contradicción, supongamos que  $v^{\lambda_0} \not\equiv 0$ . Por la primera etapa sabemos que entonces  $v^{\lambda_0} > 0$  en  $S_1^{\lambda_0} \cap D$ . La segunda etapa asegura que  $S_1^{\lambda_0} \cap D \cap \{x_N = 0\} \neq \emptyset$ . Tomemos un compacto  $K$ ,  $K \subset S_1^{\lambda_0} \cap D \cap \{x_N = 0\}$  y  $\lambda$  suficientemente próximo a  $\lambda_0$  tal que  $\mu((S_1^\lambda \cap D \setminus K) \cap \{x_N = 0\}) \leq \delta/2$ , para el cual  $v^\lambda > 0$  en  $K$ , ya que  $v^{\lambda_0} > 0$  en  $K$ . Denotemos por  $D^- = \{x \in S_1^\lambda \text{ tal que } v^\lambda < 0\}$ . La definición de  $\lambda_0$  implica que  $D^- \neq \emptyset$  si  $\lambda < \lambda_0$ . Dado que  $D^- \subset S_1^\lambda \cap D \setminus K$  las consideraciones anteriores aseguran que  $\mu(D^- \cap \{x_N = 0\})$  es pequeño. Aplicando el principio de comparación del Lema 3.7 a  $u_R^\lambda$  y  $u_R$  en  $D^-$  se sigue que  $v^\lambda \geq 0$  en  $D^-$ , lo que es una contradicción.

*Cuarta etapa.* Notemos que las tres etapas anteriores pueden repetirse para cada dirección espacial  $x_i$ ,  $i = 2, \dots, N-1$ . Esto concluye con la prueba de la simetría con respecto a las variables tangenciales (3.11).

Además  $v^\lambda \geq 0$ , para  $\lambda > \lambda_0 = \lambda_0(i)$ . Luego  $\frac{\partial u_R}{\partial x_i} < 0$  si  $x_i > \lambda_0$ , para todo  $i = 1, \dots, N-1$ .

Sin embargo, al reflejar con respecto a planos móviles  $\Pi_N^\lambda$ , la parte de la frontera donde tenemos la condición de borde Neumann,  $\Gamma_0$ , se traslada. Ello conlleva un tratamiento más delicado en la prueba del decrecimiento en dicha variable.

*Quinta etapa.* Demostramos que  $u_R$  es decreciente en la variable  $x_N$ . En lo que sigue de esta prueba destacamos la variable  $x_N$  en el método de planos móviles, y denotamos por  $S_N^\lambda = \{x \in \mathbb{R}_+^N \text{ tal que } x_N > \lambda\}$ .

Tomamos  $\lambda \in [R/2, R]$ . Es sencillo ver que

$$\begin{cases} \nabla(|\nabla u_R^\lambda|^{p-2} \nabla u_R^\lambda) - \nabla(|\nabla u_R|^{p-2} \nabla u_R) = (u_R^\lambda)^m - u_R^m, & \text{en } S_N^\lambda \cap B_R^+, \\ v^\lambda = 0, & \text{sobre } \Pi_N^\lambda \cap B_R^+, \\ v^\lambda \geq 0, & \text{sobre } S_N^\lambda \cap \partial B_R^+. \end{cases} \quad (3.25)$$

Multiplicando la ecuación por  $h(v^\lambda)$  e integrando en  $S_N^\lambda \cap B_R^+$  se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{S_N^\lambda \cap B_R^+} \left( |\nabla u_R^\lambda|^{p-2} \nabla u_R^\lambda - |\nabla u_R|^{p-2} \nabla u_R \right) \nabla h(v^\lambda) \\ & \quad + \int_{S_N^\lambda \cap B_R^+} ((u_R^\lambda)^m - u_R^m) h(v^\lambda) \\ & = \int_{\partial(S_N^\lambda \cap B_R^+)} \left( |\nabla u_R^\lambda|^{p-2} \frac{\partial u_R^\lambda}{\partial x_N} - |\nabla u_R|^{p-2} \frac{\partial u_R}{\partial x_N} \right) h(v^\lambda). \end{aligned} \quad (3.26)$$

La integral sobre la frontera se anula y en consecuencia  $v^\lambda \geq 0$  in  $S^\lambda \cap B_R^+$  para todo  $\lambda \in [R/2, R]$ .

Consideramos  $\lambda \in (R/4, R/2)$ . Queremos ver que  $v^\lambda \geq 0$  en  $B_R^+ \cap \{\lambda < x_N < 2\lambda\} = B_R^+ \cap C^\lambda$ . Obsérvese que si  $x \in B_R^+ \cap C^\lambda$  entonces  $x^\lambda \in B_R^+$ , de donde se deduce de inmediato que  $v^\lambda$  verifica (3.25)<sub>1</sub> en  $B_R^+ \cap C^\lambda$ . Razonemos como en (3.26) y veamos que la integral sobre el borde correspondiente a dichos valores de  $\lambda$  es no negativa. Es inmediato ver que  $v^\lambda \geq 0$  sobre  $\partial B_R^+ \cap C^\lambda$  y se anula sobre  $\{x_N = \lambda\}$ , lo que implica que la integral sobre el borde se anule en ambos casos. Finalmente, vemos que el integrando es no negativo sobre  $B_R \cap \{x_N = 2\lambda\}$ . Si  $x_N > R/2$  hemos demostrado ya que  $u_R$  es decreciente con respecto a  $x_N$ . Luego  $\frac{\partial u_R}{\partial x_N} \leq 0$ . Por el contrario,  $\frac{\partial u_R^\lambda}{\partial x_N} = -2 \frac{\partial u_R}{\partial x_N} \geq 0$ , obteniendo así el resultado que queríamos probar.



Si repetimos el razonamiento usando (3.26) concluimos que  $v^\lambda \geq 0$  para todo  $\lambda > 0$ .  $\square$

La siguiente tarea consistirá en demostrar que, para  $R$  suficientemente grande, la solución  $u_R$  del problema (3.12) tiene soporte compacto estrictamente contenido en la semibola  $B_R^+$ .

**Proposición 3.9** *Sea  $u_R$  una solución de (3.12) cumpliendo (3.11). Para  $R$  suficientemente grande se tiene*

$$\max_{x \in \text{supp}(u_R)} |x| < R.$$

**Demostracion.** Comenzamos probando que  $u_R$  tiene soporte compacto en la variable  $x_N$ . Obsérvese que gracias a la monotonía obtenida en el Lema 3.8 tenemos que

$$u_R^{m+1}(x', x_N) \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A u_R^{m+1}(y', y_N) dy,$$

donde  $A = \{(y', y_N) : |y'| \leq |x'|, 0 < y_N \leq x_N\}$ . Teniendo en cuenta que  $u_R$  está uniformemente acotada en  $L^{m+1}(B_R^+)$ , (primera estimación del Lema 3.5), se deduce que

$$u_R(x', x_N) \leq \frac{C}{|x'|^{(N-1)/(m+1)} |x_N|^{1/(m+1)}} \leq \frac{C(2L)^{(N-1)/(m+1)}}{R_1^{1/(m+1)}} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.27)$$

para cualquier  $|x'| \geq \frac{1}{2L}$ ,  $x_N \geq R_1$  y  $R_1 \leq R$  suficientemente grande, donde  $L$  denota la cota uniforme para  $\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2}^+)}$  del Lema 3.5. Si  $y' \in \mathbb{R}_+^{N-1}$  es tal que  $|x' - y'| \leq \frac{1}{2L}$  entonces

$$|u_R(x', R_1) - u_R(y', R_1)| \leq L|x' - y'| \leq \frac{1}{2},$$

lo que junto con (3.27) da

$$u_R(x', R_1) \leq 1, \quad \forall x'. \quad (3.28)$$

En consecuencia,  $u_R$  es una subsolución del siguiente problema,

$$\begin{cases} \nabla(|\nabla \omega|^{p-2} \nabla \omega) = \omega^m, & \text{en } \{x_N > R_1\} \cap B_R^+, \\ \omega(R_1) = 1, & \text{en } \{x_N = R_1\} \cap B_R^+, \\ \omega = 0, & \text{en } \{x_N \geq R_1\} \cap \partial B_R^+. \end{cases} \quad (3.29)$$

Nuestro siguiente objetivo será construir una supersolución del problema anterior,  $\bar{w}$ , de soporte compacto en  $x_N$ , esto es,  $\bar{w} = 0$  si  $x_N > R_2$ , para cierto  $R_2 < R$ . De esta forma, vía un principio de comparación, concluimos que  $u_R$  es de soporte compacto en  $x_N$ .

Que tal comparación se da se obtiene fácilmente mediante una integración por partes de las ecuaciones que satisfacen  $\bar{w}$  y  $u_R$ , multiplicadas por  $h(\bar{w} - u_R)$  da

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \cap \{\bar{w} \leq u_R\}} \left( |\nabla \bar{w}|^{p-2} \nabla \bar{w} - |\nabla u_R|^{p-2} \nabla u_R \right) \nabla (\bar{w} - u_R) \\ & \quad + \int_{\Omega \cap \{\bar{w} \leq u_R\}} (\bar{w}^m - u_R^m) (\bar{w} - u_R) \\ & \leq - \int_{\partial \Omega} \left( |\nabla \bar{w}|^{p-2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - |\nabla u_R|^{p-2} \frac{\partial u_R}{\partial \eta} \right) h(\bar{w} - u_R), \end{aligned}$$

donde  $\Omega = \{x_N > R_1\} \cap B_R^+$  y  $\eta$  es el vector normal exterior unitario. Obsérvese que  $\bar{w} \geq u_R$  en  $\partial \Omega$ , debido a (3.28) y al hecho de que  $u_R \equiv 0$  sobre  $\{x_N > R_1\} \cap \partial B_R^+$ . Luego la integral sobre la frontera se anula obteniéndose  $\bar{w} \geq u_R$  en  $\{x_N > R_1\} \cap B_R^+$ . Por lo tanto, si  $x_N \geq R_2$  entonces  $u(x', x_N) \leq \bar{w}(x', x_N) = 0$ .

Como tal supersolución podemos tomar, por ejemplo

$$\bar{w} = \beta \left( (R_2 - x_N)_+ \right)^\alpha, \quad (3.30)$$

donde  $\alpha, \beta, R_2$  satisfacen

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{p}{p - (m + 1)}, \\ \beta^{p-(m+1)} p^{p-1} (m+1)(p-1) &= \left( p - (m+1) \right)^p, \\ \beta (R_2 - R_1)^{p/(p-(m+1))} &= 1. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Veamos a continuación que el soporte de  $u_R$  está acotado en la dirección de  $x'$ . Por la estimación (3.27) sabemos que podemos tomar  $R_3$  suficientemente grande de manera tal que

$$u_R(x', x_N) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall |x'| \geq R_3, \quad x_N \geq \frac{\varepsilon}{2L},$$

denotando por  $L$  la cota uniforme para  $|\nabla u_R|$  del Lema 3.5 (basta tomar  $(2L)^{\frac{1}{m+1}} R_3^{-\frac{N-1}{m+1}} \leq \varepsilon^{\frac{m}{m+1}}$ ). Procediendo como en (3.28) se sigue que

$$u_R(x', x_N) \leq \varepsilon, \quad \forall x' \text{ tal que } |x'| = R_3, \quad \forall x_N > 0.$$

No es difícil ver que  $u_R$  es una subsolución del siguiente problema

$$\begin{cases} \nabla(|\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi) - \omega^m = 0, & \text{en } \Omega, \\ \psi = \varepsilon, & \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_N > 0\}, \\ -|\nabla\psi|^{p-2}\frac{\partial\psi}{\partial x_N} = \psi^{p-1}, & \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_N = 0\}, \end{cases} \quad (3.32)$$

donde  $\Omega = B(x_0, r_0)$ , con  $0 < r_0 \ll 1$  y  $x_0 \in \{x_N = 0\}$ , con  $|x_0|$  suficientemente grande. Así pues la siguiente tarea será construir una supersolución de (3.32)  $\bar{\psi}$  que se anule en un pequeño entorno de  $x_0$ . Es decir,  $\bar{\psi}$  ha de verificar lo siguiente:

$$\bar{\psi}^m \geq \nabla(|\nabla\bar{\psi}|^{p-2}\nabla\bar{\psi}), \quad \text{en } \Omega \cap \{x_N > 0\}, \quad (3.33)$$

$$-|\nabla\bar{\psi}|^{p-2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_N} \geq \bar{\psi}^{p-1}, \quad \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_N = 0\}, \quad (3.34)$$

$$\varepsilon := \inf_{\partial\Omega \cap \{x_N > 0\}} \bar{\psi} > 0, \quad (3.35)$$

Si elegimos  $x_0 \in \mathbb{R}_+^N$  tal que  $|x_0| = R_3 + r_0$  la comparación del Lema 3.7 se aplica y resulta  $\bar{\psi} \geq u_R$  en  $\Omega \cap \mathbb{R}_+^N$ , con  $R \geq R_3 + 2r_0$ . Nótese que  $x_0$  puede ser cualquiera de los puntos en  $\partial B_{R_3+r_0} \cap \{x_N = 0\}$ , en consecuencia  $u_R$  se anula en un entorno de este conjunto. La monotonía de  $u_R$  en  $|x'|$  y en  $x_N$  finaliza la demostración.

Para concluir construimos la función  $\bar{\psi}$  con las propiedades requeridas. Denotamos  $x_0 = (x'_0, 0)$ . Por simplicidad, suponemos que  $\psi$  es radial alrededor del punto  $(x'_0, d)$ , esto es,  $\bar{\psi} = \bar{\psi}(r^2)$ , donde  $r^2 = r_1^2 + (x_N - d)^2$ ,  $r_1^2 = |x' - x'_0|^2$ . Concretamente, buscamos una función de la forma

$$\bar{\psi} = a \left( (r^2 - b)_+ \right)^\alpha, \quad \text{con } \alpha = \frac{p}{p-1-m}, \quad (3.36)$$

y las constantes  $a, b, d > 0$  convenientemente fijadas dependiendo únicamente de  $r_0, m$  y  $p$ . Como

$$-|\bar{\psi}'|^{p-2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_N} = -(2a\alpha)^{p-1}r^{p-2} \left( (r^2 - b)_+ \right)^{(p-1)(\alpha-1)}(x_N - d),$$

la condición (3.34) se convierte ahora

$$(2\alpha)^{p-1}r^{p-2}d \geq \left( (r^2 - b)_+ \right)^{p-1}.$$

Tomando

$$d \geq r_0^p,$$

para  $r < r_0$  tenemos

$$(2\alpha)^{p-1} r^{p-2} d \geq r^{p-2} d \geq r^{2(p-1)} \geq \left( (r^2 - b)_+ \right)^{p-1},$$

y se cumple (3.34). Si además

$$d^2 - b < 0,$$

entonces  $\bar{\psi}$  se anula en un entorno de  $r_1 = 0$  y  $x_N = 0$ . Para ver que (3.35) se satisface necesitamos hacer uso de la siguiente desigualdad

$$r_1^2 + (x_N - d)^2 - b = r_1^2 + x_N^2 + d^2 - 2x_N d - b \geq r_0(r_0 - 2d) + d^2 - b, \quad (3.37)$$

ya que en  $\partial\Omega$  se verifica  $r_1^2 + x_N^2 = r_0^2$  y  $x_N \leq r_0$ . Entonces, si  $d < r_0/2$  podemos elegir  $b$  de forma apropiada tal que (3.35) se cumpla. Por último, demostramos (3.33), expresando dicha ecuación en variables radiales

$$(p-1)|\bar{\psi}'|^{p-2}\bar{\psi}'' + (N-1)\frac{|\bar{\psi}'|^{p-2}\bar{\psi}'}{r} \leq \bar{\psi}^m.$$

La desigualdad anterior se cumple tomando  $a$  suficientemente pequeño. En concreto, si

$$a^{p-1-m}(2\alpha)^{p-1}r^{p-2}\left(2r^2(\alpha-1)(p-1) + (p+N-2)(r^2-b)\right) \leq 1.$$

Esta elección de  $a$  obliga a tomar la constante  $\varepsilon$  también pequeña y concluye la prueba.  $\square$

## 2. Estudio del problema elíptico.

Concluimos este capítulo con la prueba del Teorema 3.3. Por la Proposición 3.9 la solución  $u_R$  del problema (3.12) tiene soporte compacto estrictamente contenido en la semibola  $B_R^+$ . Por tanto, extendiéndola por cero obtenemos una solución de (3.9), concluyendo así con la primera afirmación del teorema.

Finalicemos la prueba del Teorema 3.3, y demostremos que cualquier  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$  solución de (3.9) es de soporte compacto y radial en las variables tangenciales. Pero antes, demostramos las siguientes estimaciones, necesarias para llevar a cabo esta tarea.

**Lema 3.10** Si  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$  satisface (3.9) entonces

$$\|u\|_{L^{m+1}(\mathbb{R}_+^N)} \leq C, \quad \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \leq C \quad y \quad \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} \leq C.$$

**Demostracion.** Multiplicando la ecuación (3.9) e integrando por partes

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}_+^N} u^{m+1} = \int_{\{x_N=0\}} u^p,$$

se sigue la primera estimación, ya que  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$ . Las restantes estimaciones se infieren de la primera como sigue.

Comenzamos con la cota uniforme para  $u$ . Obsérvese que si  $u$  satisface (3.9) por los resultados del Lema 3.5 sabemos que  $u \in L^\infty(B_R^+)$ , y  $\nabla u \in L^\infty(B_{R/2}^+)$  para  $R > 0$  grande. Razonemos por contradicción y supongamos que dicha cota no es uniforme. Esto es, suponemos que existe una sucesión  $\{x_n\} \in \mathbb{R}_+^N$  tal que  $|x_n| \rightarrow \infty$  y  $|u(x_n)| \rightarrow \infty$ . Tomando cualquier  $y \in B(x_n, R/2)^+$  se puede ver que

$$u(y) \geq u(x_n) - LR/2, \tag{3.38}$$

donde  $L$  es la cota uniforme para el gradiente de  $u$  en la semibola  $B(x_n, R/2)^+$ . Por otro lado, por el paso anterior sabemos que  $\|u\|_{L^{m+1}(\mathbb{R}_+^N)} \leq C$ , lo que sustituido en (3.38) da

$$C \geq \int_{\mathbb{R}_+^N} u^{m+1} \geq \int_{B_R^+} u^{m+1} \geq \mu(B_R^+) (u(x_n) - LR/2)^{m+1},$$

lo cual no está acotado, llegando a contradicción como queríamos.

Para probar la estimación que nos falta razonamos de un modo similar, pero utilizando la continuidad Hölder del gradiente de  $u$ , véase [T], ya que carecemos de una cota uniforme para la segunda derivada. De esta forma conseguimos la expresión análoga a (3.38)

$$|\nabla u(y)| \geq |\nabla u(x_n)| - C(R/2)^\alpha,$$

para cualquier  $y \in B(x_n, R/2)$ . Pero este hecho contradice que  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$  dado que

$$C \geq \int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla u|^p \geq \int_{B(x_n, R/2)^+} |\nabla u|^p \geq \mu(B(x_n, R/2)) (\|\nabla u(x_n)\| - C(R/2)^\alpha)^p,$$

el cual no está acotado y el lema queda probado.  $\square$

Ya estamos en condiciones de completar la prueba del Teorema 3.3.

Por la Proposición 3.9 ya tenemos la existencia de una solución no trivial de (3.9),  $u_R$ , de soporte compacto cumpliendo (3.11).

A continuación demostremos que cualquier  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$  solución de (3.9) se hace pequeña fuera de  $B_R^+$ , esto es

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\mathbb{R}_+^N \setminus B_R^+} u = 0. \quad (3.39)$$

De no ser así, existirían  $\varepsilon_0 > 0$  y  $x_n \in \overline{\mathbb{R}_+^N}$ , tales que  $u(x_n) \geq \varepsilon_0$ , si  $|x_n| \rightarrow \infty$ . Sea  $L$  la cota uniforme en  $\mathbb{R}_+^N$  para el gradiente de  $u$  encontrada en el lema anterior y  $r = \frac{\varepsilon_0}{2L}$ . Para todo  $y_n \in B(x_n, r)$  se cumple

$$|u(x_n) - u(y_n)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)} |x_n - y_n| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Además  $u \geq \varepsilon_0/2$  en  $B(x_n, r) \cap \mathbb{R}_+^N$ ,  $\forall n$ . Entonces, para una subsucesión de bolas disjuntas  $B(x_n, r)$ , tenemos

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} u^{m+1} \geq \sum_n \int_{B(x_n, r) \cap \mathbb{R}_+^N} u^{m+1} = \infty,$$

lo que contradice el Lema 3.10.

Por (3.39) sabemos que podemos encontrar  $R_1 > 0$  tal que  $u(x', R_1) \leq 1$ ,  $\forall x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ . Considerando la misma función  $\bar{w}$  de la Proposición 3.9 para este nuevo  $R_1$  se sigue que

$$\bar{w} \geq u \text{ sobre } \{x_N = R_1\} \quad (3.40)$$

y

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} (\bar{w} - u) \geq 0. \quad (3.41)$$

Nótese que (3.40) y (3.41) implican que  $u \leq \bar{w}$  en  $\{x_N > R_1\}$ . Se puede ver fácilmente este hecho multiplicando la ecuación que verifican  $u$  y  $\bar{w}$  por  $h(\bar{w} - u)$  nuevamente e integrando por partes, lo que da

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \cap \{\bar{w} \leq u\}} \left( |\nabla \bar{w}|^{p-2} \nabla \bar{w} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) \nabla (\bar{w} - u) + \int_{\Omega \cap \{\bar{w} \leq u\}} (\bar{w}^m - u^m) (\bar{w} - u) \\ & \leq - \int_{\partial \Omega} \left( |\nabla \bar{w}|^{p-2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) h(\bar{w} - u), \end{aligned}$$

donde  $\Omega = \{x_N > R_1\}$ . Como la integral sobre el borde se anula, se tiene  $h(\bar{\omega} - u) \equiv 0$  en  $\Omega$ , obteniendo el resultado deseado. Es más, existe  $R_2$  tal que  $u(x', x_N) = 0$  para todo  $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ ,  $x_N > R_2$ .

Probemos ahora que  $u(x', 0) = 0$  para cualquier  $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$  con  $|x'|$  grande. Sea  $x_0 \in \{x_N = 0\}$ . En  $B(x_0, r_0) \cap \mathbb{R}_+^N$  con  $r_0 > 0$  suficientemente pequeño, consideremos la función  $\bar{\psi}$  dada por (3.36), construida en la Proposición 3.9. Ya vimos que  $\bar{\psi}$  cumplía

$$\inf_{\partial B(x_0, r_0) \cap \{x_N > 0\}} \bar{\psi} = \varepsilon,$$

véase (3.35). Que se cumpla (3.39) nos permite encontrar  $R_3 > 0$  grande y de modo tal que si  $|x_0| > R_3$  entonces  $u \leq \varepsilon$  en  $\partial B(x_0, r_0) \cap \mathbb{R}_+^N$ .

Aplicando el principio de comparación del Lema 3.7 a  $\bar{\psi}$  y a  $u$  en  $B(x_0, r_0) \cap \mathbb{R}_+^N$ , deducimos que  $u \leq \bar{\psi}$  en este dominio, y en consecuencia  $u$  se anula en un entorno de  $x_0$ , porque  $\bar{\psi}$  lo hacía.

Para completar la prueba de la compacidad del soporte de  $u$  consideremos una función  $\bar{\omega}$  con la misma expresión (3.30) pero como función de  $x_k$  para cualquier dirección  $k = 1, \dots, N-1$ , es decir

$$\bar{\omega} = \beta \left( (R_3 - x_k)_+ \right)^\alpha,$$

con  $\alpha, \beta, R_3$  elegidas como en (3.31). Análogamente, tomamos  $R_1$  suficientemente grande asegurando  $u(x) \leq 1$  siempre que  $x_k \geq R_1$  y  $x_N > 0$ . Como antes, planteando el problema (3.29) en  $\{x_k > R_1\} \cap \mathbb{R}_+^N$  se sigue que  $u \leq \bar{\omega}$  en esta región. Luego  $u = 0$  para  $x_k$  grande y  $x_N > 0$ . Como  $x_k$  era arbitrario lo que deducimos es que  $u$  es de soporte compacto.

Una vez probada la compacidad del soporte de  $u$ , de los pasos 1-3 en el Lema 3.8 se obtiene fácilmente la propiedad de simetría (3.11), lo que da fin a la prueba del Teorema 3.3.  $\square$





---

## *Bibliografía*

- [ALM1] Abia, L. M., López-Marcos, J. C. y Martínez, J. *Blow-up for semidiscretizations of reaction-diffusion equations*. Appl. Numer. Math. **20**, n.º. 1-2, 145–156, 1996. Workshop on the method of lines for time-dependent problems (Lexington, KY, 1995).
- [ALM2] Abia, L. M., López-Marcos, J. C. y Martínez, J. *On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction-diffusion equations*. Appl. Numer. Math. **26**, n.º. 4, 399–414, 1998.
- [A] Alt, H.W. y Luckhaus, S. *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*. Math. Z. **183**, n.º. 3, 311–341, 1983.
- [BB] Bandle, C. y Brunner, H. *Blow-up in diffusion equations: a survey*. J. Comp. Appl. Math. Vol. 97, 3–22, 1998.
- [BC] Baras, P. y Cohen, L. *Complete blow-up after  $T_{\max}$  for the solution of a semilinear heat equation*. J. Funct. Anal. **71**, n.º. 1, 142–174, 1987.
- [B] Barenblatt, G. I. *Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics **14**, Cambridge University Press, 1996.
- [BCP] Barenblatt, G. I., Chorin, A. J. y Prostokishin, V. M. *A model of a turbulent boundary layer with a nonzero pressure gradient*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **99**, n.º. 9, 5772–5776, 2002.
- [BL1] Barrett, J.W. y Liu, W.B. *Finite Element Approximation of the  $p$ -Laplacian*. Math. Comp., **61**, 523–537, 1993.
- [BL2] Barrett, J.W. y Liu, W.B. *Finite Element Approximation of the Parabolic  $p$ -Laplacian*. SIAM J. on Numer. Anal., **31**, 413–428, 1994.
- [BE] Bebernes, J. y Eberly, D., “Mathematical Problems from Combustion Theory”, Appl. Math. Sci. **83**, Springer-Verlag, New York, 1989.

- [BK] Berger, M. y Kohn, R. V. *A reescalig algorithm for the numerical calculation of blowing-up solutions*, Comm. Pure Appl. Math. **41**, n° 6, 841-863, 1988.
- [BG] Budd, C.J. y Galaktionov, V. *Stability and spectra of blow-up in problems with quasi-linear gradient diffusivity*. R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **454**, 2371-2407, 1998.
- [BHR] Budd, C. J., Huang, W. y Russel, R. D. *Moving mesh methods for problems with blow-up*, SIAM J. Sci. Comput. **17**, n° 2, 305-327, 1996.
- [ChM] Chen, X.Y. y Matano, H. *Convergence, asymptotic periodicity, and finite-point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations*. J. Differential Equations **78** , n° 1, 160-190, 1989.
- [ChF] Chlebík, M. y Fila, M., *Some recent results on blow-up on the boundary for the heat equation*, Banach Center Publ. Polish Academy of Science, Inst. of Math., Warsaw, **52** , 61-71, 2000.
- [ChChFS] Chipot, M., Chlebík, M., Fila, M. y Shafrir, I. *Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation in  $\mathbf{R}_+^n$  with a nonlinear boundary condition*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 223(2), 429-471, 1998.
- [ChFQ] Chipot, M., Fila, M. y Quittner, P. *Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*. Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **60** , n° 1, 35-103, 1991.
- [ChF] Chipot, M. y Filo, J. *An example of blowup for a degenerate parabolic equation with a nonlinear boundary condition*. Z. Anal. Anwendungen. **17** , n° 1, 89-102, 1998.
- [CPE1] Cortázar, C., Del Pino, M. y Elgueta, M. *On the blow-up set for  $u_t = \Delta u^m + u^m$ ,  $m > 1$* . Indiana Univ. Math. J. Vol. 47(2), 541-561, 1998.
- [CPE2] Cortázar, C., del Pino, M. y Elgueta, M. *The problem of uniqueness of the limit in a semilinear heat equation*. Comm. Partial Differential Equations, **24**, 2147-2172, 1999.
- [CPE3] Cortázar, C., Del Pino, M. y Elgueta, M. *Uniqueness and stability of regional blow-up in a porous-medium equation*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. Vol. 19(6), 927-960, 2002.
- [CEF] Cortázar, C., Elgueta, M. y Felmer, P. *Symmetry in an elliptic problem and the blow-up set of a quasilinear heat equation*. Comm. Partial Diff. Eq. Vol. 21(3&4), 507-520, 1996.

- [CEV] Cortázar, M. C., Elgueta, M. y Venegas, O. *On the blow-up set for  $u_t = (u^m)_{xx}$ ,  $m > 1$ , with nonlinear boundary conditions*. Monatsh. Math. **142**, n°. 1-2, 45–56, 2004.
- [DR] Dávila, J. y Rossi, J. D. *Self-similar solutions of the porous medium equation in a half-space with a nonlinear boundary condition. Existence and symmetry*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 296, 634–649, 2004.
- [DL] Deng, K. y Levine, H. *The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequel*. J. Math. Anal. Appl., **243**, 85–126, 2000.
- [D] DiBenedetto, E. *Degenerate parabolic equations*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [DV] Dimova, S.N. y Vasileva, D.P. *Lumped mass finite element method with interpolation of the nonlinear coefficients for a quasilinear heat transfer equation*. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, **28**, 199–215, 1995.
- [DW] Du, J. y Wu, Y. *Remarks on the diffusivity versus absorption through the boundary*. J. Sys. Sci. Math. Sci. **9**, 376–382, 1996.
- [EV] Esteban, J.R. y Vázquez, J.L. *Homogenous diffusion in  $\mathbb{R}$  with power-like nonlinear diffusivity*. Arch. Rational Mech. Anal. **103**, n°. 1, 39–80, 1988.
- [FR] Fernández Bonder, J. y Rossi, J. D. *Existence results for the  $p$ -Laplacian with nonlinear boundary conditions*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 263(1), 195–223, 2001.
- [FGR1] Ferreira, R., Groisman, P. y Rossi, J. D. *Numerical blow-up for a nonlinear problem with a nonlinear boundary condition*. Math. Models Methods Appl. Sci. **12**, n°. 4, 461–483, 2002.
- [FGR2] Ferreira, R., Groisman, P. y Rossi, J.D. *Numerical blow-up for the porous medium equation with a source* Numer. Methods Partial Differential Equations, **20**, 552–575, 2004.
- [FPP] Ferreira, R., de Pablo, A. y Pérez-Llanos, M. *Numerical blow-up for the  $p$ -Laplacian equation with a source* Comput. Methods Appl. Math. **5**, n°2, 137–154, 2005.
- [FQR] Ferreira, R., Quirós, F. y Rossi, J. D. *The balance between nonlinear inwards and outwards boundary flux for a nonlinear heat equation*. J. Differential Equations. **184**, n°. 1, 259–282, 2002.

- [F] Fila, M. *Blow-up solutions of supercritical parabolic equations*. Evolutionary equations. Vol. II, 105–158, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005.
- [FF] Fila, M. y Filo, J., *Blow-up on the boundary: A survey*, en “Singularities and Differential Equations” (S. Janeczko et al., eds.), Banach Center Publ. **33**, Polish Academy of Science, Inst. of Math., Warsaw, 67–78, 1996.
- [FFL] Fila, M., Filo, J. y Lieberman, G. *Blow-up on the boundary for the heat equation*. Calc. Var. Partial Differential Equations. **10**, n.º. 1, 85–99, 2000.
- [FQ] Fila, M. y Quittner, P. *The blow-up rate for the heat equation with a nonlinear boundary condition*. Math. Methods Appl. Sci. **14**, n.º. 3, 197–205, 1991.
- [Fo] Filo, J. *Diffusivity versus absorption through the boundary*. J. Differential Equations. **99**, n.º. 2, 281–305, 1992.
- [FP] Filo, J. y Pérez-Llanos, M. *Regional blow-up for a doubly nonlinear equation with nonlinear boundary condition*. To appear in J. Dynam. Differential Equations.
- [FM] Filippas, S. y Merle, F. *Compactness and single-point blowup of positive solutions on bounded domains*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127**, n.º. 1, 47–65, 1997.
- [Fr] Friedman, A. *Partial Differential Equation of Parabolic Type*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [FrM] Friedman, A. y McLeod, B. *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*. Indiana Univ. Math. J. **34**, no. 2 (1985), 425–447.
- [FO] Fujii, A. y Ohta, M. *Asymptotic Behavior of Blowup Solutions of a Parabolic Equation with the  $p$ -Laplacian*. Publ. RIMS. Kyoto Univ., **32**, 503–515, 1996.
- [Fj1] Fujita, H. *On the blowing-up solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I, **13**, 109–124, 1966.
- [Fj2] Fujita, H. *On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations*, Nonlinear Functional Analysis (Proc. Sympos. Pure Math.), Vol XVIII, Part 1, Chicago, Ill., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 105–113, 1970.
- [G1] Galaktionov, V.A. *Conditions for nonexistence in the large and localization of solutions of the Cauchy problem for a class of nonlinear parabolic equations*. U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. **23**, 36–44, 1983.

- [G2] Galaktionov, V.A. *On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications*. Differential Integral Equations **3**, 863–874, 1990.
- [G3] Galaktionov, V.A. *On a blow-up set for the quasilinear heat equation  $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1}$* . J. Differential Equations. **101**, n.º. 1, 66–79, 1993.
- [GKi] Galaktionov, V. A. y King, J. R. *Composite structure of global unbounded solutions of nonlinear heat equations with critical Sobolev exponents*. J. Differential Equations **189**, n.º. 1, 199–233, 2003.
- [GKPS] Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P., Posashkov, S.A. y Samarskiĭ, A.A. *A nonlinear elliptic problem with a complex spectrum of solutions*. U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. **26**, 48–54, 1986.
- [GV] Galaktionov, V.A. y Vázquez, J.L. *The Problem of Blow-up in Nonlinear Parabolic Equations*. Current developments in partial differential equations (Temuco,1999). Discrete Contin. Dyn. Syst., **8**, 399–433, 2002.
- [GNN] Gidas, B., Ni, W. M. y Nirenberg, L. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Comm. Math. Phys. Vol. 68, 209–243, 1979.
- [GK1] Giga, Y. y Kohn, R. V. *Characterizing blow-up using similarity variables*. Indiana Univ. Math. J. Vol. 42, 1–40, 1987.
- [GK2] Giga, Y. y Kohn, R. V. *Nondegeneracy of blow up for semilinear heat equations*. Comm. Pure Appl. Math. Vol. 42, 845–884, 1989.
- [GiK] Gilding, B.H. y Kersner, R. *A necessary and sufficient condition for finite speed of propagation in the theory of doubly nonlinear degenerate parabolic equations*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **126**, n.º. 4, 739–767, 1996.
- [GM] Glowinski, R. y Marrocco, A. *Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires*. Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge Anal. Numér., **9**, 41–76, 1975.
- [GR1] Groisman, P. y Rossi, J.D. *Asymptotic behaviour for a numerical approximation of a parabolic problem with blowing-up solutions*. J. Comput. Appl. Math., **135**, 135–155, 2001.
- [GR2] Groisman, P. y Rossi, J. *Aproximando soluciones que explotan*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. **26**, 35–56, 2003.

- [HV] Herrero, M. A. y Velázquez, J. J. L. *Explosion de solutions d'équations paraboliques semilinéaires supercritiques*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319**, n° 2, 141–145, 1994.
- [HRR] Huan, W., Ren, Y. y Rusell, R.D. *Moving mesh partial differential equations (MMPDES) based on the equidistribution principle*. SIAM J. Numer. Anal. **31**, 709–730, 1994.
- [J] Junning, Z. *Existence and Nonexistence of Solutions for  $u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$* . J. Math. Anal. Appl., **172**, 130–146, 1993.
- [K] Kalashnikov, A.S. *Some problems of the qualitative theory of second-order nonlinear degenerate parabolic equations*. Uspekhi Mat. Nauk **42**, n° 2, 135–176, 1987.
- [Ka] Kaplan, S. *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations*, Commun. Pure Appl. Math., **16**, 305–330, 1963.
- [Kw] Kawarada, H. *On solutions of initial-boundary problem for  $u_t = u_{xx} + 1/(1-u)$* . Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10**, n° 3, 729–736, 1974/75.
- [KW] Kazdan, J. L. y Warner, F. W. *Curvature functions for open 2-manifolds*. Ann. of Math. (2) **99**, 203–219, 1974.
- [L] Lacey, A.A. *Global blow-up of a nonlinear heat equation*. Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A **104**, 161–167, 1986.
- [LSU] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A. y Uralceva, N.N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Translations of Math. Monographs Vol.23, Providence, Rhode Island, 1968.
- [LP] Langlais, M. y Phillips, D. *Stabilization of solutions of nonlinear and degenerate evolution equations*. Nonlinear Analysis TMA **9**, 321–333, 1985.
- [Le] Leibenson, L. S. *A fundamental law of gas motion through a porous medium*. C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **47**, 16–18, 1945.
- [Lev1] Levine, H.A. *The role of critical exponents in blow up theorems*. SIAM Rev. **32**, 262–288, 1990.
- [Lev2] Levine, H. A. *The phenomenon of quenching: a survey*, en “Trends in the Theory and Practice of Nonlinear Analysis” (V. Lakshmikantham, ed.), Elsevier Science Publ., North Holland, 275–286, 1985.

- [Lev3] Levine, H. A., *Quenching, nonquenching and beyond quenching for solutions of some parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl. **155**, 243–290, 1989.
- [LP] Levine, H.A. y Payne, L.E., *Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time*, J. Differential Equations **16**, 319–334, 1974.
- [LX] Li, Y. y Xie, C. *Blow-up for  $p$ -Laplacian parabolic equations*. Electron. J. Differential Equations, **2003**, 1–12, 2003.
- [M] Merle, F. *Solution of a nonlinear heat equation with arbitrarily given blow-up points*. Comm. Pure Appl. Math. Vol. XLV, (1992), 263–300.
- [Mes] Messaoudi, S.A. *A note on blow up solutions of a quasilinear heat equation with vanishing initial energy*. J. Math. Anal. Appl., **273**, 243–247, 2002.
- [MW] Muller, C. E. y Weissler, F. B. *Single point blow up for a general semilinear heat equation*. Indiana Univ. math. J., Vol. 34, 881–913, 1983.
- [N] Nakagawa, T. *Blowing up of a finite difference solution to  $u_t = u_{xx} + u^2$* , Appl. Math. Optim, **2** n°. 4, 337–350, 1975/76.
- [PV] Peral, I. y Vázquez, J. L. *On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term*. Arch. Rational Mech. Anal. **129**, n°. 3, 201–224, 1995.
- [PR1] Pérez-Llanos, M. y Rossi, J. D. *Nontrivial compact blow-up sets of smaller dimension*. Aparecerá en Procc. Amer. Math. Soc.
- [PR2] Pérez-Llanos, M. y Rossi, J. D. *Nontrivial compact blow-up sets of lower dimension in a half-space*. Preprint.
- [PuS] Pucci, P. y Serrin, J. *The strong maximum principle revisited*. J. Differential Equations. Vol. 196(1), 1–66, 2004.
- [QR1] Quirós, F. y Rossi, J. D. *Non-simultaneous blow-up in a semilinear parabolic system*. Z. Angew. Math. Phys. **52**, n°. 2, 342–346, 2001.
- [QR2] Quirós, F. y Rossi, J. D. *Blow-up sets and Fujita type curves for a degenerate parabolic system with nonlinear boundary conditions*. Indiana Univ. Math. J. **50**, 629–654, 2001.
- [R] Rossi, J. D. *Approximation of the Sobolev Trace Constant*, Divulg. Mat. **11**, 109–113, 2003.



- [SGKM] Samarskii, A.A., Galaktionov, V.A., Kurdyumov, S.P. y Mikhailov, A.P. *Blow-up in problems for quasilinear parabolic equations*. Nauka, Moscow, 1987 (in Russian). English transl.: Walter de Gruyter, Berlin, 1995.
- [SV] Souplet, P. y Vázquez, J. L. *Stabilization towards a singular steady state with gradient blow-up for a diffusion-convection problem*. Discrete Contin. Dyn. Syst. **14**, n°. 1, 221–234, 2006.
- [T] Tolksdorf, P. *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*. J. Differential Equations. Vol. 51 n°. 1, 126–150, 1984.
- [Ts] Tsutsumi, M. *Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **8**, 211–229, 1972.
- [V] Vazquez, J. L. *Domain of existence and blowup for the exponential reaction-diffusion equation*. Indiana Univ. Math. J. **48**, n°. 2, 677–709, 1999.
- [Ve] Velázquez, J. J. L. *Estimates on the  $(n - 1)$ -dimensional Hausdorff measure of the blow-up set for a semilinear heat equation*. Indiana Univ. Math. J. **42** n°. 2, 445–476, 1993.
- [VK] Vol’pert, A.I. y Khudyaev, A.I. *Analysis in Classes of Discontinuous Functions and Equations of Mathematical Physics*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1985.
- [WWX] Wang, S., Wang, M. y Xie, C. *Parabolic equation of the  $m$ -Laplacian with nonlinear boundary condition*. Chinese Sci. Bull. **43**, n°. 11, 905–908, 1998.
- [W1] Weissler, F. B. *Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation*. Israel J. Math. **38**, n°. 1-2, 29–40, 1981.
- [W2] Weissler, F. B. *Single point blow up of semilinear initial boundary value problems*. J. Differential Equations, Vol. 55, 204–224, 1984.
- [Z1] Zaag, H. *On the regularity of the blow-up set for semilinear heat equations*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. Vol. 19(5), 505–542, 2002.
- [Z2] Zaag, H. *Determination of the curvature of the blow-up set and refined singular behavior for a semilinear heat equation*. Preprint.
- [ZBLM] Zel’dovich, Ya.B., Barenblatt, G.I., Librovich, V.B. y Makhviladze, G.M. *The Mathematical Theory of Combustion and Explosions*, Consultants Bureau, New York, 1985.
- [ZQ] Zuo-dong, Y. y Qi-shao, L. *Blow-up Estimates for a Non-Newtonian Filtration Equation*, J. Math. Res. Exposition, **23**, 7–14, 2003.



